De Fundamentaalgroepoïde

Radboud Universiteit Nijmegen

Bachelorscriptie Wiskunde

Auteur:
Sandra Hommersom
3032256

Begeleider:
Dr. Michael Müger

Juli 2012

Samenvatting

Het doel van deze scriptie is een gegeneraliseerd groepsbegrip te bekijken en met name een generalisatie van de fundamentaalgroep. De tekst opent met enige voorkennis over categorieëntheorie. Dit zijn vooral definities van bijvoorbeeld categorieën, functoren en pushouts. Ook zullen een aantal voorbeelden van categorieën behandeld worden.

Na deze algemene voorkennis, gaat de scriptie dieper in op het concept van groepoïden. Een belangrijke definitie daarbij is die van een isomorfisme. Vanuit dit concept kan de fundamentaalgroepoïde gedefinieerd worden. Hiervoor wordt eerst wat voorkennis behandeld over paden, homotopie en de fundamentaalgroep.

Hierna bereiken we het hoogtepunt van de tekst, namelijk de stelling van Seifert-Van Kampen. Hiervan bestaat zowel een versie voor fundamentaalgroepen als een versie voor fundamentaalgroepoïden. Tot slot zal op verschillende manieren de fundamentaalgroep van de cirkel bepaald worden. Dan wordt ook duidelijk waarom de notie van een fundamentaalgroep alleen hiervoor niet genoeg is.

Naast deze rode draad worden nog een tweetal andere concepten behandeld. Ten eerste wordt bewezen dat de categorische en de algebraïsche definitie van een groepoïde equivalent zijn. Daarnaast worden de de fundamentaalgroep en -groepoïde vanuit zekere functoren geconstrueerd.

Inhoudsopgave

Inleiding

Deze scriptie gaat over de fundamentaalgroepoïde, wat een onderwerp is uit de algebraïsche topologie. Dit is een relatief nieuw vakgebied uit de wiskunde en dient als het ware als een vertaalsleutel tussen twee soorten wiskunde. Enerzijds wiskunde uitgedrukt in topologische ruimten en continue functies en anderzijds wiskunde uitgedrukt door algebraïsche structuren en combinatoriek. Met behulp van de laatste soort probeert algebraïsche topologie topologische ruimten in te delen in klassen van homeomorfe ruimten. Twee belangrijke aspecten uit de algebraïsche topologie zijn homologie en homotopie. De laatste hiervan zullen we in deze scriptie beschouwen met betrekking tot paden.

Resultaten uit de algebraïsche topologie worden over het algemeen opgeschreven met behulp van categorieëntheorie. Het eerste hoofdstuk van deze scriptie zal hier dan ook een introductie over geven. Belangrijk zijn de definities van een categorie, een functor en een pushout. Ook zullen we in dit hoofdstuk een aantal voorbeelden van categorieën zien die we eigenlijk al wel kennen, maar nog niet hebben gezien als categorische definitie.
Categorieëntheorie is een abstracte studie die met behulp van een aantal axioma's overeenkomsten probeert te vinden tussen wiskundige structuren door te kijken naar structuurbewarende afbeeldingen daartussen. Dit vakgebied is nog redelijk nieuw en werd voor het eerst geïntroduceerd door de Poolse respectievelijk Amerikaanse wiskundigen Samuel Eilenberg en Saunders Mac Lane in de eerste helft van de jaren '40. In het begin werd categorieëntheorie voornamelijk toegepast binnen de algebraïsche topologie. Door de jaren heen werd categorieëntheorie steeds breder toepasbaar, ook buiten de wiskunde. Voorbeelden hiervan zijn informatica, taalwetenschappen, cognitiewetenschappen en filosofie. Het vakgebied heeft gezorgd voor verrassende resultaten. Zo zijn er bijvoorbeeld connecties gevonden tussen logica en meetkunde. Door haar brede toepasbaarheid wordt categorieëntheorie zelfs gezien als een soort universele wiskundige taal, zoals we verzamelingenleer kennen.

Het tweede hoofdstuk zal dieper ingaan op één concept uit de categorieëntheorie, namelijk groepoïden. Deze werden voor het eerst geïntroduceerd in 1926 door de Duitse wiskundige Heinrich Brandt. Omdat deze scriptie resultaten vanuit een categorisch oogpunt beschouwt, zal een categorische definitie van een groepoïde gegeven worden. Een groepoïde is een generalisatie van een groep. Dit is zowel categorisch als algebraïsch in te zien. In de algebraïsche definitie komt het erop neer dat in een groepoïde niet voor elk tweetal elementen uit een verzameling hun product hoeft te bestaan. In een groep is dit wel het geval.
Dit hoofdstuk maakt ook een uitstapje naar de algebraïsche definitie van groepoïden. In de tweede sectie zal bewezen worden dat de categorische en algebraïsche definitie van een groepoïde equivalent zijn. Voor beide definities kun je een groep zien als speciaal geval van een groepoïde, dus dit bewijs zou ook voor groepen gegeven kunnen worden. Hier gaat de scriptie echter niet op in.

Het derde hoofdstuk zal de definitie van het onderwerp van de scriptie geven, namelijk de definitie van de fundamentaalgroepoïde. Dit is een generalisatie van de fundamentaalgroep, bekend uit het vak 'Topologie' (Bachelor Wiskunde, RU Nijmegen). Daarvoor worden eerst wat topologische termen en eigenschappen daarvan behandeld. Dit gaat over paden en padhomotopieën. De definitie van een pad is voortgekomen uit de behoefte een algemeen idee te geven van samenhangendheid. Het idee hierachter is dat een geometrisch figuur uit 'één stuk' bestaat, als je van elk willekeurig punt naar elk ander punt kunt lopen binnen de figuur. Formeel staat dit ook bekend als padsamenhangendheid.
Paden hebben zekere eigenschappen, die we net niet mooi genoeg vinden. We kunnen namelijk inzien dat paden bijna een groepoïde vormen. Het probleem dat echter optreedt heeft voornamelijk te maken met de snelheid waarmee paden doorlopen worden. Om dit op te lossen, kan een equivalentierelatie op de paden worden gedefinieerd. Hieruit kan de fundamentaalgroep gedefinieerd worden.
Bij het construeren van een fundamentaalgroep moet altijd een basispunt in de topologische ruimte worden gekozen. Dit is echter niet altijd handig. Om dit probleem op te lossen, willen we een constructie geven die niet meer afhankelijk is van een gekozen basispunt. Ofwel, een constructie die als het ware alle mogelijke basispunten van een topologische ruimte meeneemt. De constructie die bedoeld wordt heet de fundamentaalgroepoïde.
Ook dit hoofdstuk wijkt even af van de rode draad in de scriptie. We zullen namelijk zien hoe zowel de fundamentaalgroep als de fundamentaalgroepoïde niet alleen gezien kunnen worden als categorische of algebraïsche structuur. In de laatste sectie wordt behandeld hoe je met zekere functoren op topologische ruimten deze structuren kan maken.

In het vierde en laatste hoofdstuk zal het hoogtepunt van deze scriptie behandelen. Dit is de stelling van Seifert-Van Kampen. Deze stelling is vernoemd naar de Duitse wiskundige Herbert Karl Johannes Seifert (*1907, †1996) en de Vlaamse wiskundige Egbert Rudolf van Kampen (*1908, †1942). Van deze twee staat vooral Van Kampen bekend om zijn werk binnen de (algebraïsche) topologie. De stelling zegt iets over hoe de fundamentaalgroep van een topologische ruimte bepaald kan worden uit de fundamentaalgroepen van zekere deelverzamelingen van die ruimte. In de formulering van de stelling is dit niet direct duidelijk, maar het bewijs zegt hierover meer. Het idee is dat de elementen van de fundamentaalgroep van de hele ruimte in zekere zin voortgebracht worden door de elementen van de fundamentaalgroepen van de deelverzamelingen.
Naast de stelling van Seifert-Van Kampen voor fundamentaalgroepen, bestaat er ook een versie van de stelling voor fundamentaalgroepoïden. Deze versie draagt dezelfde naam, hoewel deze eigenlijk werd bewezen door de Britse wiskundige Ronald Brown (*1935). Dit gebeurde ook enkele decennia later dan voor de versie voor fundamentaalgroepen. Omdat Seifert en Van Kampen zich eerder met de versie voor fundamentaalgroepen hebben bezig gehouden, zijn toch hun namen ook aan de latere versie gekoppeld. In het boek van Tammo tom Dieck staat de versie voor fundamentaalgroepoïden wel geformuleerd onder de naam van Brown. Het bewijs in dit boek heeft ook gediend als basis voor het bewijs in deze scriptie ([3] Stelling 6.7.1).
De eerste sectie van hoofdstuk 4 zal geheel bestaan uit het bewijzen van de verschillende versies van bovengenoemde stelling. In de tweede sectie zal de stelling toegepast worden op de cirkel, welke een basisobject is binnen de algebraïsche topologie. Hierbij zullen we ook zien dat de door Seifert en Van Kampen geformuleerde stelling niet algemeen genoeg is om toepasbaar te zijn op de cirkel. In deze sectie zal de fundamentaalgroep van de cirkel op verschillende manieren bepaald worden, waarbij gebruik wordt gemaakt van Browns versie voor fundamentaalgroepoïden. Dit resultaat zal het einde van de scriptie vormen.

Hoofdstuk 1

Categorieëntheorie

Dit hoofdstuk is een introductie tot het wiskundige vakgebiek categorieëntheorie. De eerste sectie zal gaan over de definitie van een categorie en zal een aantal voorbeelden van categorieën behandelen. In de tweede sectie zullen we zien hoe we structuurbewarende afbeeldingen tussen categorieën kunnen maken. De derde sectie zal iets zeggen over hoe we plaatjes van (delen van) categorieën kunnen maken, zodat we een categorie op een overzichtelijke manier kunnen bekijken. Deze sectie geeft ook een aantal definities met betrekking tot dergelijke plaatjes.

1.1 Definitie van een categorie

Als eerste is er een definitie nodig die wiskundige structuren en afbeeldingen daarin veralgemeniseert. De meest simpele benamingen voor deze objecten zijn 'punten' en 'pijlen'. Daarbij zijn axioma's nodig die de belangrijkste eigenschappen van de afbeeldingen definiëren. De eigenschappen die bekeken worden zijn samenstelling en identiteiten.

Definitie 1.1. *Een* ***categorie*** $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ *bestaat uit de volgende onderdelen:*

- *Een klasse* $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$*, de klasse van* ***objecten*** *(punten) van* $\mathcal{C}$*,*
- *Een klasse* $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$*, de klasse van* ***morfismen*** *(pijlen) van* $\mathcal{C}$*,*
- *Voor elke pijl* f *bestaan er objecten* $\mathrm{dom}(f)$ *en* $\mathrm{cod}(f)$*, geheten het* ***domein*** *respectievelijk* ***codomein*** *van* f*. We schrijven* $f : x \to y$ *om aan te geven dat* $x = \mathrm{dom}(f)$ *en* $y = \mathrm{cod}(f)$*. Dan heet* f *ook wel een* ***morfisme van*** $\boldsymbol{x}$ ***naar*** $\boldsymbol{y}$*. Om alle* $f : x \to y$ *in* $\mathcal{C}$ *aan te geven, schrijven we*
$$\mathrm{Mor}(x, y) := \{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \mid x = \mathrm{dom}(f),\ y = \mathrm{cod}(f)\}.$$
Hiermee geldt
$$\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) = \bigcup_{x,y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{Mor}(x, y),$$
- *Een binaire bewerking* $\circ$*, die aan elk tweetal morfismen* $f \in \mathrm{Mor}(x, y)$*,* $g \in \mathrm{Mor}(y, z)$ *een morfisme* $g \circ f \in \mathrm{Mor}(x, z)$ *toekent. Hier heet* $g \circ f$ *de* ***samenstelling*** *van* f *en* g*,*
- *Voor elke* $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *bestaat een* $1_x \in \mathrm{Mor}(x, x)$*, geheten de* ***identiteit*** *van* x*.*

De bewerking $\circ$ *in een categorie* $\mathcal{C}$ *moet voldoen aan de volgende twee axioma's:*

(C1) Associativiteit: $\forall f \in \mathrm{Mor}(x,y)$, $g \in \mathrm{Mor}(y.z)$, $h \in Mor(z,w)$: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$,

(C2) Identiteit: $\forall f \in \mathrm{Mor}(x,y)$: $1_y \circ f = f = f \circ 1_x$.

In deze definitie is het toegestaan te spreken over dé identiteit op een object x. Deze zijn namelijk uniek: als 1_x en $1'_x$ beide identiteiten zijn op x, dan volgt uit axioma (C2) dat $1_x = 1_x \circ 1'_x = 1'_x$. Vaak wordt voor het gemak het teken $\circ$ weggelaten en wordt voor de samenstelling van morfismen f en g gewoon gf geschreven.
Merk op dat objecten niet per se verzamelingen hoeven te zijn en morfismen niet per se afbeeldingen. Elk 'iets' dat aan bovenstaande punten voldoet, is een categorie. Het meest simpele voorbeeld van een categorie gaat wel over verzamelingen en afbeeldingen. Dat dit een categorie vormt volgt uit het basisaspect van wiskunde: de verzamelingenleer.

Voorbeeld 1.2. *De categorie* **Sets** *van verzamelingen heeft als objecten verzamelingen en als pijlen afbeeldingen. Als deelcategorie hiervan bestaat* $\mathbf{Sets_{fin}}$*, waarin de objecten beperkt worden tot eindige verzamelingen en de klasse pijlen alleen bestaat uit afbeeldingen tussen eindige verzamelingen.*

Definitie 1.3. *Een categorie $\mathcal{D}$ is een **deelcategorie** van de categorie $\mathcal{C}$ als* $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *en* $\mathrm{Mor}(\mathcal{D}) \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$*, zodanig dat identiteiten en samenstellingen hetzelfde blijven.*

Door restricties te leggen op de objecten of pijlen, kunnen dus weer nieuwe categorieën gecreëerd worden, mits deze aan alle eisen voldoen natuurlijk. Zo kunnen bijvoorbeeld in $\mathbf{Sets_{fin}}$ de pijlen beperkt worden tot injectieve afbeeldingen om een nieuwe categorie te verkrijgen.
Andere voorbeelden van categorieën die vaak in de wiskunde voorkomen, zijn categorieën van gestructureerde verzamelingen. Dat wil zeggen dat de objecten in die categorie een zekere structuur bevatten en dat de pijlen deze structuur behouden. Enkele bekende voorbeelden zijn:

Voorbeeld 1.4. *De categorie* **Top** *van topologische ruimten heeft als objecten topologische ruimten en als pijlen continue afbeeldingen tussen deze ruimten. Een object in* **Top** *bestaat dus eigenlijk uit twee dingen: een verzameling X en een topologie τ op X.*
Doordat continuïteit gesloten is onder samenstellen en voor elke topologische ruimte X de identieke afbeelding $id : X \to X$, $x \mapsto x$ continu is, volgt dat **Top** *inderdaad aan alle eisen van een categorie voldoet.*

Voorbeeld 1.5. *De categorie* **Grp** *van groepen heeft als objecten groepen en als pijlen groepshomomorfismen. Ook hier volgt duidelijk uit de eigenschappen van groepen en groepshomomorfismen dat* **Grp** *een categorie is.*

De definitie van een deelcategorie stimuleert om na te denken over het feit dat sommige categorieën 'groter' zijn dan andere. De volgende definitie geeft een onderscheid dat gemaakt kan worden over de grootte van een categorie.

Definitie 1.6. *Een categorie $\mathcal{C}$ heet **klein** als zowel* $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *als* $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ *verzamelingen zijn. Anders heet een categorie **groot**.*

Zo is bijvoorbeeld de categorie met één object, die de identiteit als enige morfisme heeft, een kleine categorie, terwijl **Sets** een grote categorie is. Dit laatste komt doordat in de axioma's van de verzamelingenleer is opgelegd dat een verzameling zichzelf niet mag bevatten. Zou **Sets** namelijk een kleine categorie zijn, dan zou Ob(**Sets**) een verzameling zijn en dus ook een object van **Sets**. Met andere woorden: Ob(**Sets**) $\in$ Ob(**Sets**).

1.2 Pijlen tussen categorieën

Om de structuur van verschillende categorieën met elkaar te vergelijken, worden afbeeldingen bekeken die de structuur van een categorie behoudt. Zo'n afbeelding tussen twee categorieën heet een functor.

Definitie 1.7. *Een* ***functor*** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *tussen twee categorieën is een afbeelding op objecten en pijlen zodanig dat:*

- $F(x) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ *voor elke* $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$*,*
- $F(f) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ *voor elke* $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$*.*

Bovendien moet F *voldoen aan de volgende drie axioma's:*

(F1) $\forall x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\, \forall f \in \mathrm{Mor}(x, y)$*:* $F(f) : F(x) \to F(y)$*,*

(F2) $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$*:* $F(1_x) = 1_{F(x)}$*,*

(F3) $\forall f, g \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ *met* $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{cod}(f)$*:* $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$*.*

De drie axioma's zeggen dus dat een functor F domeinen, codomeinen, identiteiten en samenstellingen behoudt. Functoren worden dus gebruikt om verschillende wiskundige structuren op een abstracte manier met elkaar te vergelijken. Zo kun je bijvoorbeeld overeenkomsten proberen te vinden tussen topologische ruimten en groepen. In de topologie kijk je hiervoor naar de fundamentaalgroep $\pi_1(X, x)$ van een topologische ruimte X en $x \in X$. Verderop zullen we zien hoe je deze π_1 ook als functor kan zien.
Elke categorie $\mathcal{C}$ heeft een **identiteitsfunctor** $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Deze wordt simpelweg gegeven door $1_{\mathcal{C}}(x) = x$ als $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ en $1_{\mathcal{C}}(f) = f$ als $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$. Deze toekenning voldoet duidelijk aan de axioma's (F1), (F2) en (F3).

Propositie 1.8. *Als* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *en* $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ *twee functoren tussen categorieën zijn, dan is* $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ *ook een functor.*

Bewijs. Voor elke eis gebruiken we dat F en G functoren zijn en dat die dus aan betreffende eis voldoen. Als $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, dan $F(x) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ en dus ook $(G \circ F)(x) = G(F(x)) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$. Analoog geldt dat $(G \circ F)(f) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{E})$ voor elke $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$. Te bewijzen is nog dat $G \circ F$ aan de axioma's (F1), (F2) en (F3) voldoet.
Zij $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ en $f \in \mathrm{Mor}(x, y)$, dan $F(f) : F(x) \to F(y)$ en dus volgt voor de samenstelling $G(F(f)) : (G(F(x)) \to (G(F(y))$, ofwel $(G \circ F)(f) : (G \circ F)(x) \to (G \circ F)(y)$. Dus $(G \circ F)$ voldoet aan axioma (F1).
Zij $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, dan $F(1_x) = 1_{F(x)}$, dus $(G \circ F)(1_x) = G(F(1_x)) = G(1_{F(x)}) = 1_{G(F(x))} = 1_{(G \circ F)(x)}$. Dus $G \circ F$ voldoet aan axioma (F2).
Zij $f, g \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$, dan $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, dus $(G \circ F)(g \circ f) = G(F(g \circ f)) = G(F(g) \circ F(f)) = G(F(g)) \circ G(F(f)) = (G \circ F)(g) \circ (G \circ F)(f)$. Dus $G \circ F$ voldoet aan axioma (F3). Merk op dat $\circ$ hier gebruikt wordt voor samenstelling in twee verschillende categorieën.
Dus we kunnen concluderen: $G \circ F$ is een functor. □

Nu kan een nieuwe categorie gedefinieerd worden: de categorie **Cat** is de categorie van kleine categorieën. Deze heeft als objecten kleine categorieën en als pijlen functoren tussen kleine categorieën. Met de identiteitsfunctor en het lemma hierboven zijn alle ingrediënten voor een categorie aanwezig. Men zou alleen nog moeten nagaan dat **Cat** aan de axioma's (C1) en (C2) voldaan is. Dit is echter slechts een kwestie van uitschrijven.
Voor de categorie **Cat** kan hetzelfde argument gegeven worden als eerder voor de categorie **Sets**. Omdat Ob(**Cat**) alle kleine categorieën bevat, moet **Cat** zelf wel een grote categorie zijn.

1.3 Commutatieve diagrammen

De werking van categorieën is schematisch weer te geven door diagrammen. Een diagram is een plaatje van punten en pijlen. De punten kunnen objecten van een categorie representeren en de pijlen de morfismen tussen die objecten. In een speciaal geval kunnen de punten ook categorieën voorstellen. Dan stellen de pijlen functoren voor. Vaak is het overzichtelijker om categorieën in een diagram te bekijken.

Voorbeeld 1.9. *Als $\mathcal{C}$ een categorie is en x, y zijn objecten en $f \in \mathrm{Mor}(x, y)$, dan is het meest simpele voorbeeld van een diagram de notatie $f : x \to y$ voor het morfisme f. Is f een isomorfisme (zie Definitie 2.2), dan is de volgende figuur een voorbeeld van een diagram.*

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "1_x"] & \\ y \arrow[r, "f^{-1}"'] & x \end{tikzcd}$$

Figuur 1.1: Een diagram.

Dit diagram heeft nog een speciale eigenschap: het is **commutatief**. Dit betekent dat beide manieren om met de pijlen mee van x naar x te lopen hetzelfde opleveren, i.e. $f^{-1} \circ f = 1_x$. Als er genoeg objecten en morfismen in een categorie aanwezig zijn, dan zijn deze diagrammen verder uit te breiden en kunnen ze willekeurig groot worden.

Soms is een categorie geheel weer te geven in een diagram. Om alvast vooruit te lopen naar het volgende hoofdstuk kijken we naar een groepoïde. Een voorbeeld is de **tree groupoid** met twee objecten. Het woord 'tree' geeft aan dat er per tweetal objecten een unieke pijl is van het ene object naar het andere. Met twee objecten geeft dit dus vier pijlen. Deze categorie ziet er dus schematisch uit als onderstaande figuur. Een cirkelvormige pijl geeft de identiteit op een punt aan.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left] \arrow[r, bend left] & \bullet \arrow[l, bend left] \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Figuur 1.2: Tree groupoid met twee objecten.

Enkele definities die in latere hoofdstukken nodig zijn, maken gebruik van commutatieve diagrammen.

Definitie 1.10. *Zij $\mathcal{C}$ een categorie en $x_1, x_2, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Een **coproduct** van x_1 en x_2 is een diagram*

$$x_1 \xrightarrow{f_1} y \xleftarrow{f_2} x_2$$

van morfismen van $\mathcal{C}$ met de eigenschap: voor elke $z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ en voor elk diagram

$$x_1 \xrightarrow{g_1} z \xleftarrow{g_2} x_2$$

van morfismen van $\mathcal{C}$ is er een unieke $h \in \mathrm{Mor}(y, z)$ zodat $h \circ f_1 = g_1$ en $h \circ f_2 = g_2$.

De notatie voor bovenstaand coproduct is $y = x_1 \coprod x_2$. Deze definitie kan weergegeven worden door één diagram. De eis op dit diagram is dan dat de twee driehoekvormige deeldiagrammen commuteren. De uniciteit van h wordt weergegeven door de stippellijn.

$$\begin{tikzcd} x_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & y \arrow[d, dotted, "h"] & x_2 \arrow[l, "f_2"'] \arrow[dl, "g_2"] \\ & z & \end{tikzcd}$$

Figuur 1.3: Coproduct van x_1 en x_2.

Het is niet zo dat een tweetal objecten noodzakelijk een coproduct heeft. Hebben ze dat wel, dan is het vaak nog lastig een coproduct te vinden. De categorie **Sets** heeft echter wel de eigenschap dat elk tweetal objecten een coproduct heeft. Bovendien zijn we ook bekend met dit coproduct: dit is namelijk de disjuncte vereniging.

Lemma 1.11. *Zij A, B objecten in* **Sets***, dan is* $A \xrightarrow{i_1} A \sqcup B \xleftarrow{i_2} B$ *een coproduct van A en B. Hierin is de disjuncte vereniging gedefinieerd als*

$$A \sqcup B = \{(a,1) \mid a \in A\} \cup \{(b,2) \mid b \in B\}$$

en i_1, i_2 zijn de voor de hand liggende afbeeldingen

$$\forall a \in A: \ i_1(a) := (a,1), \qquad \forall b \in B: \ i_2(b) := (b,2).$$

Bewijs. Stel C is een object in **Sets** en er zijn pijlen $f : A \to C$, $g : B \to C$. Volgens de definitie moeten we dan een unieke pijl $h : A \sqcup B \to C$ construeren in onderstaand diagram, zodanig dat de twee driehoekvormige deeldiagrammen commuteren.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "f"'] & A \sqcup B \arrow[d, dotted] & B \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Definieer hiervoor de pijl $h : A \sqcup B \to C$ in **Sets** door

$$h(x,\alpha) = \begin{cases} f(x) & \text{als } \alpha = 1 \\ g(x) & \text{als } \alpha = 2 \end{cases}.$$

Dan is het duidelijk dat aan de commutativiteitseisen is voldaan: als $a \in A$, dan $(h \circ i_1)(a) = h(a,1) = f(a)$, dus $(h \circ i_1) = f$. Evenzo geldt $(h \circ i_2) = g$.
Stel verder dat $k : A \sqcup B \to C$ een pijl in **Sets** is zodanig dat $(k \circ i_1) = f$ en $(k \circ i_2) = g$. Per definitie van $A \sqcup B$ geldt dan:

$$k(x,\alpha) = (k \circ i_\alpha)(x) = \left\{ \begin{array}{ll} (k \circ i_1)(x) & \text{als } \alpha = 1 \\ (k \circ i_2)(x) & \text{als } \alpha = 2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{als } \alpha = 1 \\ g(x) & \text{als } \alpha = 2 \end{array} \right\} = h(x,\alpha).$$

Dus h is inderdaad uniek. $\square$

De cijfers 1 en 2 in de tweede component van elementen van $A \sqcup B$ zijn volledig willekeurig. Elk tweetal verschillende tekens op deze plekken levert een coproduct van A en B. Duidelijk is dat deze coproducten wel isomorf zijn aan $A \sqcup B$. In het algemeen zijn coproducten uniek op isomorfisme na en daarom mogen we ook spreken over 'het coproduct'.
Het coproduct neem je van twee objecten in een categorie. Volgend hierop is de definitie van een pushout, die je juist van twee pijlen neemt. Een pushout is in zekere zin een generalistatie van een coproduct. Deze definitie is belangrijk om later de stelling van Seifert-Van Kampen te kunnen begrijpen.

Definitie 1.12. *Zij $\mathcal{C}$ een categorie en $x_0, x_1, x_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Een **pushout** van $f_1, f_2 \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ is een diagram*

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \\ x_2 \arrow[r, "g_2"'] & y \end{tikzcd}$$

met de volgende eigenschappen:

- *Het diagram commuteert, i.e. $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$,*
- *Voor elke $z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$: als $h_1 \in \mathrm{Mor}(x_1, z)$ en $h_2 \in \mathrm{Mor}(x_2, z)$ zodat $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$, dan bestaat een unieke $k \in \mathrm{Mor}(y, z)$ zodat $h_1 = k \circ g_1$ en $h_2 = k \circ g_2$.*

De notatie voor bovenstaande pushout is $y = x_1 \,{}_{f_1}\!\coprod_{f_2} x_2$. De tweede eigenschap lijkt in zekere zin op het coproduct $y = x_1 \coprod x_2$, alleen legt de definitie van een pushout nog eisen op commutativiteit van het diagram. Net als bij een coproduct is het object y in het diagram uniek op isomorfie na. Ook een pushout is weer te geven in één diagram. Wederom moet meegenomen worden dat de mogelijke deeldiagrammen commuteren.

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & x_1 \arrow[d, "g_1"] \arrow[ddr, bend left, "h_1"] & \\ x_2 \arrow[r, "g_2"'] \arrow[drr, bend right, "h_2"'] & y \arrow[dr, dotted, "k"] & \\ & & z \end{tikzcd}$$

Figuur 1.4: Pushout van f_1 en f_2.

Het volgende lemma is niet noodzakelijk voor resultaten verderop in deze tekst, maar is bedoeld om een eerste intuïtie voor pushouts te verkrijgen. Bovendien is het een voorbeeld uit de topologie, waar we later nog wel dieper op ingaan. Herinner je uit de eerste paragraaf van dit hoofdstuk dat pijlen in de categorie van topologische ruimten continue afbeeldingen zijn.

Lemma 1.13. *Zij (X, τ) een topologische ruimte met $X_0, X_1 \in \tau$ zodanig dat $X = X_0 \cup X_1$. Dan is*

$$\begin{tikzcd} X_0 \cap X_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_0"'] & X_1 \arrow[d, "j_1"] \\ X_0 \arrow[r, "j_0"'] & X \end{tikzcd}$$

een pushout in de categorie **Top**. *Hierin zijn i_ν, j_ν $(\nu = 0, 1)$ inclusieafbeeldingen.*

In diagrammen van **Top** worden de topologieën, die onderdeel zijn van de objecten, vaak niet opgeschreven. Dit geeft een overzichtelijker diagram en bovendien is het meestal duidelijk met welke topologie gewerkt wordt. Een andere reden is dat de topologieën alleen op de achtergrond aanwezig zijn: ze definiëren namelijk de continuïteit van de afbeeldingen.
Voor de deelverzamelingen X_0, X_1 en $X_0 \cap X_1$ in dit lemma gebruiken we de deelveramelingen-topologieën van τ. Ten opzichte van deze topologieën zijn de inclusieafbeeldingen continu.

Bewijs. De gelijkheid $j_1 \circ j_0 = i_1 \circ i_0$ is duidelijk, omdat al deze afbeeldingen inclusies zijn. Stel verder dat (Y, σ) een topologische ruimte is en $h_0 : X_0 \to Y$, $h_1 : X_1 \to Y$ continue afbeeldingen zijn zodanig dat $h_1 \circ i_1 = h_0 \circ i_0$.
Om dit lemma te bewijzen moeten we dan een unieke continue $a : X \to Y$ construeren zodanig dat de twee driehoekvorminge deeldiagrammen in onderstaand diagram commuteren.

$$\begin{tikzcd}
X_0 \cap X_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_0"'] & X_1 \arrow[d, "j_1"] \arrow[ddr, bend left, "h_1"] & \\
X_0 \arrow[r, "j_0"'] \arrow[drr, bend right, "h_0"'] & X \arrow[dr, dotted, "a"] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

Daarvoor definiëren we de volgende afbeelding:

$$a : X \to Y,\ x \mapsto \begin{cases} h_0(x) & \text{als } x \in X_0 \\ h_1(x) & \text{als } x \in X_1 \end{cases}.$$

Merk op dat dit een zinnige definitie is, omdat X overdekt wordt door X_0 en X_1. Als $x \in X_0 \cap X_1$, dan geldt $h_0(x) = h_0(i_0(x)) = h_1(i_1(x)) = h_1(x)$, dus a is welgedefinieerd.
Eerst moeten we controleren of a een continue afbeelding is en dus een pijl in de categorie **Top**. Zij daarvoor $A \in \sigma$. Dan geldt:

$$\begin{aligned} a^{-1}(A) &= \{x \in X \mid a(x) \in A\} \\ &= \{x \in X_0 \mid h_0(x) \in A\} \cup \{x \in X_1 \mid h_1(x) \in A\} \\ &= h_0^{-1}(A) \cup h_1^{-1}(A). \end{aligned}$$

Omdat h_0 en h_1 continue afbeeldingen zijn, geldt dat $h_0^{-1}(A), h_1^{-1}(A) \in \tau$. Daaruit volgt dat $a^{-1}(A) \in \tau$ en dus is a continu.
Nu moeten we nog nagaan dat aan de commutativiteitseisen is voldaan en dat a uniek is. Voor $x \in X_0$ geldt dat $(a \circ j_0)(x) = a(x) = h_0(x)$, dus $a \circ j_0 = h_0$. Op analoge wijze volgt $a \circ j_1 = h_1$. Stel verder dat $b : X \to Y$ een continue afbeelding is zodanig dat $b \circ j_0 = h_0$ en $b \circ j_1 = h_1$. Dan geldt in het bijzonder $b \circ j_0 = a \circ j_0$ en dus voor $x \in X_0$ hebben we $a(x) = (a \circ j_0)(x) = (b \circ j_0)(x) = b(x)$, dus op X_0 zijn a en b gelijk. Op analoge wijze zijn ze op X_1 gelijk en dus $a = b$. Dus a is uniek.
Dus het diagram is inderdaad een pushout. □

1.3.1 De categorie van commutatieve vierkanten

Gegeven objecten en pijlen in een categorie $\mathcal{C}$, kunnen we ook een categorie maken van commutatieve diagrammen. Hier zullen we dit behandelen voor commutatieve vierkanten, omdat we de zo te verkrijgen categorie verderop in hoofdstuk 4 nodig zullen hebben.

Zij $\mathcal{C}$ een categorie, dan bekijken we onderstaand diagram van morfismen in $\mathcal{C}$. In deze kubus nemen we aan dat zowel de achterzijde als de voorzijde commutatieve vierkanten zijn. Deze geven we aan met respectievelijk $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$. Als de hele kubus commuteert, dan noemen we dit een pijl $\mathbf{k} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Zo'n kubus als pijl wordt dus eigenlijk gegeven door het viertal (k_0, k_1, k_2, k_3) van pijlen in $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, "k_0"'] \arrow[dd, "f_2"'] & & a_1 \arrow[dr, "k_1"] \arrow[dd, "f_4" near end] & \\
& b_0 \arrow[rr, crossing over, "g_1" near start] \arrow[dd, "g_2"' near start] & & b_1 \arrow[dd, "g_4"] \\
a_2 \arrow[rr, "f_3"' near end] \arrow[dr, "k_2"'] & & a_3 \arrow[dr, "k_3"] & \\
& b_2 \arrow[rr, "g_3"'] & & b_3
\end{tikzcd}$$

Op deze manier hebben we een categorie $\mathcal{C}_\square$ van commutatieve vierkanten en pijlen daartussen. In bovenstaande constructie zijn $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ voorbeelden van objecten in $\mathcal{C}_\square$ en $\mathbf{k}$ is een voorbeeld van een pijl. Het kubische diagram is de identiteit op $\mathbf{A}$ als voor $i = 0, \ldots, 3$ geldt: $a_i = b_i$, $f_i = g_i$ en $k_i = 1_{a_i}$. Samenstelling komt neer op het achter elkaar plakken van twee kubische diagrammen. Dus als $\mathbf{h}$ en $\mathbf{k}$ twee pijlen zijn zodanig dat $\mathrm{dom}(\mathbf{h}) = \mathrm{cod}(\mathbf{k})$, dan wordt de samenstelling $\mathbf{h} \circ \mathbf{k}$ in $\mathcal{C}_\square$ gegeven door componentsgewijze samenstelling van (h_0, h_1, h_2, h_3) en (k_0, k_1, k_2, k_3) in $\mathcal{C}$.

Hoofdstuk 2

Groepoïden

Voordat de fundamentaalgroepoïde kan worden gedefinieerd, moeten we eerst weten wat een groepoïde is. Dit is een definitie binnen de categorieëntheorie. Groepen en groepoïden zijn algebraïsche objecten en we kennen dan ook binnen de algebra definities hiervan. Deze categorische en algebraïsche definities worden met elkaar vergeleken. In beide gevallen is een groep een speciaal geval van een groepoïde.

2.1 De categorie Grpd

Elke categorie heeft een klasse van morfismen. Een speciaal soort morfisme is een isomorfisme. De definitie van een isomorfisme kan op twee manieren gegeven worden. Eerst bekijken we de definitie via links- en rechtsinversen. Zij $\mathcal{C}$ een categorie en zij f en g twee pijlen in $\mathcal{C}$ zodanig dat $g \circ f = 1_{\mathrm{dom}(f)}$. Dan noemen we g een **linksinverse** of **retractie** van f en f een **rechtsinverse** of **sectie** van g.

Propositie 2.1. *Zij $\mathcal{C}$ een categorie en $f : x \to y$ en $g_1, g_2 : y \to x$ pijlen in $\mathcal{C}$ zodanig dat $g_1 \circ f = 1_x$ en $f \circ g_2 = 1_y$. Dan geldt $g_1 = g_2$.*

Bewijs. $g_2 = 1_x \circ g_2 = (g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ 1_y = g_1$. □

Als bovenstaande het geval is, dan noemen we f een isomorfisme en $g := g_1\ (= g_2)$ heet dan een inverse van f. Een pijl is dus een isomorfisme als deze zowel een links- als rechtsinverse heeft (en deze gelijk zijn). Dit kan in het algemeen ook opgeschreven worden zoals in de volgende definitie. Deze definitie zullen we in het vervolg ook hanteren.

Definitie 2.2. *Zij $\mathcal{C}$ een categorie. Een pijl $f : x \to y$ heet een **isomorfisme** als er een pijl $g : y \to x$ bestaat zodanig dat $g \circ f = 1_x$ en $f \circ g = 1_y$. In dit geval heet g een **inverse** van f en we zeggen dat x **isomorf** is aan y.*

Een pijl van een object naar zichzelf heet een **endomorfisme**. Alle endomorfismen op een object x noteren we met $\mathrm{End}(x)$. Is een endomorfisme bovendien een isomorfisme, dan noemen we dit een **automorfisme**. Alle automorfismen op een object x worden genoteerd door $\mathrm{Aut}(x)$ en er geldt $\mathrm{Aut}(x) \subset \mathrm{End}(x)$.
Merk op dat als f een isomorfisme is, dan is g uit Definitie 2.2 automatisch ook een isomorfisme. Bovendien zijn inversen uniek: stel in een categorie $\mathcal{C}$ dat $f : x \to y$ een isomorfisme is en g en h zijn beide inversen. Dan $g = g \circ 1_y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = 1_x \circ h = h$. Hieruit volgt dat we mogen spreken over dé inverse en schrijven daarom ook wel $g = f^{-1}$.

Het simpelste voorbeeld van een isomorfisme is een identiteit. Voor een $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ is 1_x een isomorfisme en deze heeft zichzelf als inverse. Bovendien geeft een samenstelling van isomorfismen weer een isomorfisme: laten f en g isomorfismen in een categorie $\mathcal{C}$ zijn met inversen f^{-1} respectievelijk g^{-1}. Dan is $g \circ f$ ook een isomorfisme met inverse $f^{-1} \circ g^{-1}$. Nu kan een categorische definitie van van een groepoïde gegeven worden.

Definitie 2.3. *Een kleine categorie $\mathcal{C}$ heet een **groepoïde** als elke pijl in $\mathcal{C}$ een isomorfisme is.*

Merk op dat in een groepoïde niet hoeft te gelden dat alle objecten isomorf aan elkaar zijn. Er hoeft namelijk helemaal geen pijl te bestaan tussen twee objecten. Zo is bijvoorbeeld elke categorie $\mathcal{C}$ met $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ beperkt tot identiteiten een groepoïde, hoewel er geen pijlen bestaan tussen twee verschillende objecten.
In het vorige hoofdstuk is al even de tree groupoid met twee objecten naar voren gekomen. Nu we beter weten wat een groepoïde is, kunnen we dit voorbeeld nader bekijken en vastleggen wat de pijlen precies zijn. Laten $\bullet$ en $\star$ de twee objecten zijn, dan zijn er in ieder geval twee pijlen $1_\bullet$ en $1_\star$. Verder was gegeven dat er een unieke pijl van $\bullet$ naar $\star$ is, evenals een unieke pijl van $\star$ naar $\bullet$. Als we deze eerste pijl ι noemen, dan moet ι een isomorfisme zijn om de categorie een groepoïde te laten vormen. Er geldt dus genoodzaakt dat ι^{-1} de unieke pijl van $\star$ naar $\bullet$ is. Deze tree groupoid van twee objecten ziet er dus als volgt uit:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left, "1_\bullet"] \arrow[r, bend left, "\iota"] & \star \arrow[l, bend left, "\iota^{-1}"] \arrow[loop right, "1_\star"] \end{tikzcd}$$

Figuur 2.1: Tree groupoid met twee objecten, nader bepaald.

Groepoïden vormen op zichzelf ook weer een categorie, genaamd **Grpd**. Omdat **Grpd** als objecten categorieën heeft, is het logisch om als pijlen in deze categorie functoren te nemen. In het volgende hoofdstuk zullen voorbeelden van dit soort functoren tussen een speciaal soort groepoïden gegeven worden.

2.2 Equivalente definities

Naast een categorische definitie zoals gegeven in de vorige paragraaf, kan ook een algebraïsche definitie van een groepoïde gegeven worden. In de algebra kan een groepoïde worden gezien als een generalisatie van een groep. De vraag die dan direct wordt opgeroepen is of deze twee definities van een groepoïde equivalent zijn. Deze paragraaf zal dieper op deze vraag ingaan.

2.2.1 Groepoïden in algebra

Het is gewenst om een groepoïde als een uitbreding van een groep te zien, omdat groepen tot de basiskennis van de wiskunde behoren. Om in te zien wat precies het verschil is tussen deze twee structuren is het handig eerst de definitie van een groep te herhalen.

Definitie 2.4. *Een **groep** $(G, \cdot, ^{-1}, 1_G)$ is een viertal bestaande uit een verzameling G, een binaire operatie $\cdot : G \times G \to G$, een unaire operatie $^{-1} : G \to G$ en een eenheidselement 1_G. Het viertal $(G, \cdot, ^{-1}, 1_G)$ moet voldoen aan de volgende axioma's:*

(G1) Associativiteit: $\forall a, b, c \in G : \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,

(G2) Inverse element: $\forall a \in G :$ *$a \cdot a^{-1}$ en $a^{-1} \cdot a$ zijn altijd gedefinieerd en* $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1_G$,

(G3) Identiteit: $\forall a \in G: 1_G \cdot a = a = a \cdot 1_G$.

Voor groepen is bekend dat het eenheidselement uniek is en ook dat inversen uniek zijn. Het is dus geoorloofd de inversen te beschrijven door de operatie $^{-1}$. De operatie zegt bovendien dat elk element van G een inverse heeft.
In bovenstaande definitie wordt aangegeven dat $\cdot$ aan elk tweetal elementen uit $G \times G$ een nieuw element uit G toekent. Met andere woorden: G is gesloten onder zijn vermenigvuldiging, ofwel $\cdot$ is een totale functie. Dit is precies de eis die vervalt voor de definitie van een groepoïde. In een groepoïde geldt dus dat niet voor elk tweetal $(a, b) \in G \times G$ dat het product $a \cdot b$ altijd gedefinieerd is.

Definitie 2.5. *Een **groepoïde** is een zestal $(G, B, s, t, \cdot, ^{-1})$ bestaande uit een verzameling G, een verzameling B, ook wel de basis van G genoemd, twee surjectieve afbeeldingen $s, t : G \to B$, een partiële functie $\cdot : G \times G \to G$ en een unaire operatie $^{-1} : G \to G$. Het zestal $(G, B, s, t, \cdot, ^{-1})$ moet voldoen aan de volgende axioma's:*

(GP1) Als een drietal $a, b, c \in G$ voldoet aan $a \cdot b = c$, dan is elk van deze drie elementen uniek bepaald door de andere twee,

(GP2) $\forall a, b \in G$: het product $a \cdot b$ is gedefinieerd precies als $s(a) = t(b)$,

(GP3) Associativiteit: $\forall a, b, c \in G$: als $a \cdot b$ en $b \cdot c$ gedefinieerd zijn, dan zijn $(a \cdot b) \cdot c$ en $a \cdot (b \cdot c)$ gedefinieerd en ze zijn bovendien gelijk,

(GP4) Identiteit: $\forall a \in G$ bestaan er links- en rechtsidentiteiten l_a en r_a zodat $l_a \cdot a = a = a \cdot r_a$,

(GP5) Inverse element: $\forall a \in G$: $a \cdot a^{-1}$ en $a^{-1} \cdot a$ zijn altijd gedefinieerd en $a \cdot a^{-1} = l_a$ en $a^{-1} \cdot a = r_a$.

Dit lijkt op het eerste gezicht een heel andere definitie dan die van een groep, terwijl eerst gezegd werd dat alleen maar het product niet altijd hoeft te bestaan. Echter, alle extra onderdelen in bovenstaande definitie zijn nodig om netjes te definiëren wanneer een dergelijk product dan wél bestaat. Je kunt je bijvoorbeeld voorstellen dat twee afbeeldingen alleen maar samenstelbaar zijn wanneer het codomein van de eerste afbeelding gelijk is aan het domein van de tweede afbeelding. Dit is precies wat de afbeeldingen s en t doen in bovenstaande definitie. De gekozen letters hiervoor komen uit het Engels: s en t geven aan wat de 'source' en 'target' van een element uit een groepoïde zijn.
Verder is er in een groepoïde geen uniek element meer dat de naam 'eenheidselement' draagt. Wel volgt uit axioma (GP1) dat de links- en rechtsidentiteiten van een element uniek zijn. Bovendien volgt daaruit dat als $a \cdot b$ gedefinieerd is, dan $l_b = r_a$ en dat inverse elementen uniek zijn. Het is dus wederom logisch de inverse te beschrijven door de afbeelding $^{-1}$.

Voorbeeld 2.6. *Zij X een verzameling en $R \subset X \times X$ een equivalentierelatie op X. Dan kan R als groepoïde gezien worden door $s, t : R \to X$ te definiëren als de projecties op de eerste respectievelijk tweede component en het product te definiëren door $(x, y) \cdot (y, z) = (x, z)$. De links- en rechtsidentiteiten van een element (x, y) zijn (x, x) respectievelijk (y, y) en de inverse wordt gegeven door $(x, y)^{-1} = (y, x)$. Merk op dat elke eigenschap van de equivalentierelatie R nodig is bij deze constructie.*

2.2.2 Vergelijking tussen algebra en categorieëntheorie

De definitie van een groepoïde in de algebra, zoals gegeven in vorige paragraaf, zet aan om over elementen a in een groepoïde na te denken als pijlen van $s(a)$ naar $t(a)$. Het product $a \cdot b$ is dan te zien als samenstelling van dit soort pijlen, waarbij eerst de pijl b doorlopen wordt en daarna pijl a. Dit idee kunnen we gebruiken om te laten zien dat groepoïden in algebra en in categorieëntheorie eigenlijk hetzelfde zijn. Dit staat geformuleerd in de volgende stelling.

Stelling 2.7. *De Definities 2.3 en 2.5 zijn equivalent.*

Bewijs. Om deze stelling te bewijzen moeten we laten zien dat de twee definities elkaar impliceren. Zij daarvoor $\mathcal{G}$ een categorische groepoïde. Definieer dan $G := \mathrm{Mor}(\mathcal{G})$ en $B := \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$. Voor een pijl $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{G})$ definieer $s, t : G \to B$ door $s(f) := \mathrm{dom}(f)$ en $t(f) := \mathrm{cod}(f)$. Deze zijn surjectief, omdat voor elk object $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ geldt $s(1_x) = t(1_x) = x$. Definieer verder $\cdot : G \times G \to G$ door $g \cdot f = g \circ f$ mits de samenstelling in $\mathcal{G}$ gedefinieerd is. Dit is een partiële functie omdat $g \circ f$ gedefinieerd is precies als $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$. Hiermee is ook aan axioma (GP2) voldaan. Definieer tenslotte ${}^{-1} : G \to G$ door $f \mapsto f^{-1}$ waar f^{-1} de inverse van f in $\mathcal{G}$ is. Aan axioma (GP1) is voldaan omdat elke pijl in de groepoïde $\mathcal{G}$ een (unieke) inverse heeft. In een vergelijking $g \circ f = h$ is dan elk van de drie pijlen uniek bepaald door de andere twee. Dat aan axioma (GP3) is voldaan volgt direct uit de eigenschappen van een categorie. Als we voor $f \in G$ defniëren $l_f := 1_{\mathrm{cod}(f)}$ en $r_f := 1_{\mathrm{dom}}(f)$, dan zien we ook in dat aan de axioma's (GP4) en (GP5) is voldaan. Dus $(G, B, s, t, \cdot, {}^{-1})$ is een groepoïde volgens Definitie 2.5.
Omgekeerd, bij een groepoïde $(G, B, s, t, \cdot, {}^{-1})$ definiëren we een categorie $\mathcal{G}$ door $\mathrm{Ob}(\mathcal{G}) := B$ en $\mathrm{Mor}(\mathcal{G}) := G$. Voor $a \in G$ definieer het domein en het codomein door $\mathrm{dom}(a) := s(a)$ en $\mathrm{cod}(a) := t(a)$. Definieer de samenstelling door $a \circ b := a \cdot b$, mits $s(a) = t(b)$. Om de identiteit te definiëren gebruiken we dat de afbeeldingen s en t surjectief zijn: voor $p \in B$ bestaan er $a, b \in G$ zodanig dat $s(a) = p = t(b)$. Dan bestaat het product $a \cdot b$ en definiëren we $1_p := l_b\,(= r_a)$. Dit is welgedefinieerd. Alle ingrediënten van een categorie zijn nu aanwezig en uit de eigenschappen van de groepoïde $(G, B, s, t, \cdot, {}^{-1})$ is ook duidelijk dat $\mathcal{G}$ een categorie is. Merk op dat we al weten dat $\mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ en $\mathrm{Mor}(\mathcal{G})$ verzamelingen zijn. Voor een element $a \in G$ bestaat a^{-1} in G. Voor dit element geldt: $a \circ a^{-1} = a \cdot a^{-1} = l_a = 1_{t(a)} = 1_{\mathrm{cod}(a)}$. Evenzo volgen de gelijkheden $a^{-1} \circ a = a^{-1} \cdot a = r_a = 1_{s(a)} = 1_{\mathrm{dom}(a)}$. Hieruit volgt dat elke pijl in de categorie $\mathcal{G}$ een isomorfisme is. Dus de categorie $\mathcal{G}$ is inderdaad een groepoïde volgens Definitie 2.3. $\square$

In beide definities kun je een groep zien als een speciaal geval van een groepoïde, namelijk door een dusdanig deel te bekijken van een groepoïde G, zodat het product of de samenstelling wel altijd gedefinieerd is. Hierover wordt in het volgende hoofdstuk iets meer verteld met betrekking tot de fundamentaalgroep.

Hoofdstuk 3

De fundamentaalgroepoïde

Met de notie van een groepoïde kunnen we nu de fundamentaalgroepoïde van een topologische ruimte definiëren. Hierbij worden veel topologische termen gebruikt. Deze zullen dan ook alvorens de definitie van de fundamentaalgroepoïde herhaald worden, mede om notatie vast te leggen. Ok zullen we zien hoe de fundamentaalgroepoïde $\Pi(X)$ bij een topologische ruimte X als deelcategorie de fundamentaalgroep $\pi_1(X, x)$ voor een $x \in X$ heeft. In de laatste sectie van dit hoofdstuk wordt nog iets gezegd over hoe Π en π_1 ook als functoren gezien kunnen worden.

3.1 Paden en homotopie

De fundamentaalgroepoïde gebruikt net als de fundamentaalgroep homotopieklassen van paden in een topologische ruimte X. Om dit tot stand te brengen worden in deze sectie een aantal begrippen en eigenschappen herhaald. Omdat deze wel al als bekend worden verondersteld, zullen de eigenschappen zonder bewijs genoemd worden.
In het algemeen is een pad een continue afbeelding van een zeker domein naar X. Voor dit domein kunnen verschillende keuzes worden gemaakt, bijvoorbeeld een willekeurig interval $[a, b]$. Hier kiezen we als domein steeds het interval $I = [0, 1]$.

Definitie 3.1. *Zij (X, τ) een topologische ruimte. Een **pad** in X is een continue afbeelding $\alpha : I \to X$. We zeggen dat α een pad is van $\alpha(0)$ naar $\alpha(1)$.*

Het constante pad in x wordt aangegeven met $\mathbb{1}_x$. Dit is dus de afbeelding $\mathbb{1}_x : I \to X, s \mapsto x$. Samenstellen van paden komt overeen met het achtereenvolgens doorlopen van de paden. Om het domein I hetzelfde te houden, moeten de paden wel sneller doorlopen worden. Als notatie voor het samenstellen van paden gebruiken we $*$. Dus als α een pad is van x naar y en β is een pad van y naar z, dan is $\beta * \alpha$ een pad van x naar z gegeven door

$$(\beta * \alpha)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{als } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s-1) & \text{als } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

Bij een pad α van x naar y hoort een inverse pad $\alpha^{-1} : I \to X, s \mapsto \alpha(1-s)$. Het pad α wordt dan in omgedraaide richting doorlopen. De verzameling van alle paden in een topologische ruimte X geven we aan met $P(X)$. De verzameling $P(X)$ lijkt mooie eigenschappen te hebben, maar dit is net niet het geval. De paden vormen met basis X en samenstelling namelijk bijna een groepoïde. Echter, het samenstellen van paden is niet associatief, vanwege de snelheid waarmee de paden doorlopen worden. Ook kun je bij een niet-constant pad geen inverse pad vinden, zodat

samenstelling een constant pad oplevert. Dit komt doordat samenstelling is gedefinieerd door het achter elkaar plakken van paden.
Om juist deze mooie eigenschappen te geven aan $P(X)$, bekijken we een equivalentierelatie op paden. In de volgende sectie zullen we zien dat we door uitdelen naar deze relatie precies de fundamentaalgroepoïde krijgen. In deze sectie bekijken we eerst wat eigenschappen en dan een speciaal geval door toepassen van de relatie op een deel van $P(X)$. De equivalentierelatie die we zoeken wordt gegeven door padhomotopie.

Definitie 3.2. *Zij (X, τ) een topologische ruimte en α en β twee paden van x naar y in X. Een een continue afbeelding $H : I \times I \to X$ heet een* **padhomotopie** *van α naar β als H voldoet aan:*

$$\begin{array}{llll} H(s,0) = \alpha(s) & \forall s \in I, & H(0,t) = x & \forall t \in I \\ H(s,1) = \beta(s) & \forall s \in I, & H(1,t) = y & \forall t \in I \end{array}$$

Dus voor elke $t \in I$ is $H_t : s \mapsto H(s,t)$ een pad van x naar y en bovendien geldt $H_0 = \alpha$ en $H_1 = \beta$. De notatie voor deze padhomotopie is $\alpha \sim \beta$.

Een padhomotopie is dus een manier om continu van het ene pad naar het andere te lopen. Dit is een specifiek geval van homotopie, dat in het algemeen beschrijft hoe je op continue manier van een continue afbeelding naar een andere kan lopen.

Propositie 3.3. *Het samenstellen van paden heeft de volgende eigenschappen met betrekking tot padhomotopie:*

- $\alpha * (\beta * \gamma) \sim (\alpha * \beta) * \gamma$ *(als de samenstellingen gedefinieerd zijn),*
- $\alpha^{-1} * \alpha \sim \mathbb{1}_{\alpha(0)}$,
- $\alpha * \mathbb{1}_{\alpha(0)} \sim \alpha \sim \mathbb{1}_{\alpha(1)} * \alpha$,
- $\alpha \sim \beta$ *impliceert* $\gamma * \alpha \sim \gamma * \beta$ *en* $\alpha * \delta \sim \beta * \delta$ *(als de samenstellingen gedefinieerd zijn).*

In combinatie met een continue afbeelding $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ geldt voor paden in X:

- $f \circ (\beta * \alpha) = (f \circ \beta) * (f \circ \alpha)$,
- *als $\alpha \sim \beta$, dan $f \circ \alpha \sim f \circ \beta$.*

Hierin wordt met $\circ$ de samenstelling van afbeeldingen bedoeld (en dus niet de formele samenstelling zoals in Definitie 1.1).

Het bewijs van het eerste deel van deze propositie kan gevonden worden in [1], sectie 3.2. Het vijfde punt van de propositie volgt door uitschrijven. Als in het zesde punt H een padhomoptie van α naar β is, dan is $f \circ H$ een padhomoptie van $f \circ \alpha$ naar $f \circ \beta$. Hiermee zijn alle uitspraken gerechtvaardigd.

Met de equivalentierelatie $\sim$ kunnen homotopieklassen van paden geconstrueerd worden, genoteerd door $[\alpha]$ voor een pad α. Er geldt dus $[\alpha] = \{\beta \in P(X) \mid \alpha \sim \beta\}$. Merk op dat als α een pad is van x naar y, dan bevat de klasse $[\alpha]$ ook alleen paden van x naar y. Deze eis wordt opgelegd door de definitie van een padhomotopie.
Een speciaal soort homotopieklasse wordt verkregen als we een vast element $x_0 \in X$ in een topologische ruimte X kiezen. Definiëren we $P(X, x_0)$ als de verzameling van paden van x_0 naar x_0, zogenaamde **lussen** in x_0, dan is $\sim$ in het bijzonder een equivalentierelatie op $P(X, x_0)$. Als we

deze verzameling uitdelen naar $\sim$ krijgen we de groep $\pi_1(X, x_0)$, de **fundamentaalgroep** van X met basispunt x_0. Hierin zijn de binaire operatie, de inverse en identiteit als volgt gedefineerd:

$$\begin{array}{lcl} [\beta]\cdot[\alpha] & = & [\beta * \alpha] \\ [\alpha]^{-1} & = & [\alpha^{-1}] \\ 1_{\pi_1(X,x_0)} & = & [\mathbb{1}_{x_0}] \end{array}$$

Dat $\pi_1(X, x_0)$ samen met bovenstaande operaties en identiteit een groep vormt, volgt uit Propositie 3.3. Verder weten we dat als er een pad bestaat van x naar y, dan zijn de fundamentaalgroepen met basispunt x respectievelijk y isomorf in de categorie van groepen, i.e. $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y)$. Als α een pad is van x naar y, wordt het isomorfisme gegeven door:

$$\alpha_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y), [\beta] \mapsto [\alpha * \beta * \alpha^{-1}].$$

3.2 Definitie van $\Pi(X)$

In het volgende hoofdstuk wordt onderzocht hoe je een fundamentaalgroep van een topologische ruimte X zou kunnen bepalen uit fundamentaalgroepen van zekere deelverzamelingen van X. Wat blijkt is dat er een eis ligt op de eigenschappen van de doorsnede van deze deelverzamelingen. De doorsnede moet namelijk padsamenhangend zijn. Zoals we dan ook zullen zien, kan door het kiezen van een basispunt niet altijd aan deze eis worden voldaan.
Daarom behandelen we in deze sectie een generalisatie van de fundamentaalgroep. Dit is een constructie waarin geen basispunt gekozen hoeft te worden, ofwel een constructie die alle mogelijke basispunten (dat wil zeggen elk element van X) meeneemt. Deze constructie heet de fundamentaalgroepoïde.

Definitie 3.4. *Zij (X, τ) een topologische ruimte, dan is de* ***fundamentaalgroepoïde*** *van (X, τ) de categorie $\Pi(X)$ met:*

- $\mathrm{Ob}(\Pi(X))$ *bestaat precies uit alle elementen van X, ofwel* $\mathrm{Ob}(\Pi(X)) = X$,
- *Voor $x, y \in X$ bestaat* $\mathrm{Mor}(x, y)$ *precies uit alle homotopieklassen van paden van x naar y,*
- *Voor $[\alpha] \in \mathrm{Mor}(x, y)$ en $[\beta] \in \mathrm{Mor}(y, z)$ definiëren we $[\beta] \circ [\alpha] := [\beta * \alpha] \in \mathrm{Mor}(x, z)$,*
- *Voor $x \in X$ is $[\mathbb{1}_x] \in \mathrm{Mor}(x, x)$ de identiteit op x.*

Dat de samenstelling van de fundamentaalgroepoïde $\Pi(X)$ aan de axioma's (C1) en (C2) voldoet, volgt direct uit Propositie 3.3. De fundamentaalgroepoïde is dus inderdaad een categorie. Voor het samenstellen van homotopieklassen van paden zullen we vanaf nu $\circ$ weglaten. De samenstelling in de fundamentaalgroepoïde is dus gedefinieerd door $[\beta][\alpha] = [\beta * \alpha]$.
In bovenstaande definitie is $\Pi(X)$ al heuristisch een groepoïde genoemd. Het moet natuurlijk wel gecontroleerd worden of $\Pi(X)$ inderdaad een groepoïde is.

Propositie 3.5. *Zij (X, τ) een topologische ruimte. Dan is de fundamentaalgroepoïde $\Pi(X)$ een groepoïde.*

Bewijs. We gaan na of $\Pi(X)$ aan Definitie 2.3 voldoet. In de topologische ruimte (X, τ) is X een verzameling, dus in ieder geval is $\mathrm{Ob}(\Pi(X))$ een verzameling. Verder is $P(X)$ een verzameling, dus in het bijzonder vormen alle homotopieklassen van paden in X, die als deelverzameling van $P(X)$ beschouwd kan worden, een verzameling. Dus ook $\mathrm{Mor}(\Pi(X))$ is een verzameling. Dus $\Pi(X)$ is een kleine categorie.

Nu moeten we nog bewijzen dat elke pijl in $\Pi(X)$ een isomorfisme is. Dit volgt echter direct uit Propositie 3.3: als $[\alpha]$ een pijl van x naar y is, dan is $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$ een pijl van y naar x. Bovendien geldt $[\alpha^{-1}][\alpha] = [\alpha^{-1} * \alpha] = [\mathbb{1}_x]$ en $[\alpha][\alpha^{-1}] = [\alpha * \alpha^{-1}] = [\mathbb{1}_y]$. Dus $[\alpha]$ is een isomorfisme. $\square$

Dus de fundamentaalgroepoïde is inderdaad een object in de categorie **Grpd**. Het is gezegd dat pijlen in deze laatste categorie functoren zijn, omdat groepoïden zelf ook categorieën zijn. We willen weten wat voor functoren er bestaan tussen fundamentaalgroepoïden. Deze worden onder andere gegeven door continue afbeeldingen. Voorlopig zullen we alleen functoren tussen groepoïden zien die voortkomen uit continue afbeeldingen. Voor het creëren van functoren wordt dus ook de topologie van een topologische ruimte gebruikt. Merk op dat deze alleen heel erg op de achtergrond nodig was bij de definitie van de fundamentaalgroepoïde, namelijk voor de continuïteit van padhomotopieën.

Propositie 3.6. *Zij (X, τ) en (Y, σ) topologische ruimten en $f : X \to Y$ een continue afbeelding. Dan is $\Pi(f) : \Pi(X) \to \Pi(Y)$ een functor. Deze functor wordt gegeven door:*

- *Voor $x \in X$ definiëren we:* $\Pi(f)(x) = f(x)$,
- *Voor $[\alpha] \in \mathrm{Mor}(x, y)$ definiëren we:* $\Pi(f)([\alpha]) = [f \circ \alpha]$.

Let op: met $\circ$ wordt hier dus de samenstelling van $\alpha : I \to X$ en $f : X \to Y$ bedoeld, niet de samenstelling van homotopieklassen van paden.

Bewijs. We gaan na of $\Pi(f)$ aan Definitie 1.7 voldoet. Voor $x \in \Pi(X) = X$ is $\Pi(f)(x) = f(x)$ een element van $Y = \Pi(Y)$, dus $\Pi(f)$ kent aan elk object van $\Pi(X)$ een object van $\Pi(Y)$ toe.
Voor $[\alpha] \in \mathrm{Mor}(x, y)$ geldt dat $f \circ \alpha$ continu omdat f en α beide continu zijn. Bovendien geldt $(f \circ \alpha)(0) = f(x)$ en $(f \circ \alpha)(1) = f(y)$, dus $f \circ \alpha$ is een pad van $f(x)$ naar $f(y)$. Dus $\Pi(f)([\alpha]) = [f \circ \alpha]$ is een pijl in $\Pi(Y)$. Ook weten we uit Propositie 3.3 dat $[\alpha] = [\beta]$ impliceert $[f \circ \alpha] = [f \circ \beta]$, dus $\Pi(f)$ is welgedefinieerd op pijlen van $\Pi(X)$. Hiermee is aan de eerste twee eisen van een functor voldaan. Ook zien we direct dat $\Pi(f)$ voldoet aan axioma (F1).
Voor $x \in X$ wordt de identiteit op x gegeven door $[\mathbb{1}_x]$. Dan $\Pi(f)([\mathbb{1}_x]) = [f \circ \mathbb{1}_x] = [\mathbb{1}_{f(x)}] = [\mathbb{1}_{\Pi(f)(x)}]$. Hierin volgt het middelste gelijkteken uit $(f \circ \mathbb{1}_x)(s) = f(x)$ voor alle $s \in I$. Dus $\Pi(f)$ voldoet aan axioma (F2).
Voor $[\alpha] : x \to y$ en $[\beta] : y \to z$ moeten we bewijzen dat $\Pi(f)([\beta][\alpha]) = \Pi(f)([\beta])\Pi(f)([\alpha])$. Er geldt dat $[\beta][\alpha] = [\beta * \alpha] : x \to z$, dus $\Pi(f)([\beta][\alpha]) = \Pi(f)([\beta * \alpha]) = [f \circ (\beta * \alpha)]$ is een pijl van $f(x)$ naar $f(z)$. Voor het rechterlid van de te bewijzen gelijkheid geldt juist $\Pi(f)([\beta])\Pi(f)([\alpha]) = [f \circ \beta][f \circ \alpha] = [(f \circ \beta) * (f \circ \alpha)]$. Uit het tweede deel van Propositie 3.3 weten we dat $f \circ (\beta * \alpha)$ gelijk is aan $(f \circ \beta) * (f \circ \alpha)$, dus in het bijzonder zijn hun padhomotopieklassen gelijk. Dus volgt daarmee $\Pi(f)([\beta][\alpha]) = [f \circ (\beta * \alpha)] = [(f \circ \beta) * (f \circ \alpha)] = \Pi(f)([\beta])\Pi(f)([\alpha])$. Hiermee voldoet $\Pi(f)$ aan axioma (F3).
Dus $\Pi(f)$ is een functor $\Pi(X) \to \Pi(Y)$. $\square$

Een voorbeeld van een functor die op deze manier verkregen kan worden is de zogenaamde **inclusiefunctor**. Als X een topologische ruimte is en $U \subset X$, dan is de inclusie $i : U \to X$ continu. De functor $\Pi(i)$ die gedefinieerd is in bovenstaande propositie is dan precies de identieke afbeelding op zowel de objecten als de pijlen van $\Pi(U)$ en geeft dus de inclusie van $\Pi(U)$ in $\Pi(X)$.

Binnen de fundamentaalgroepoïde kan worden gekeken naar de automorfismen van een object. Omdat alle pijlen van de fundamentaalgroepoïde een verzameling vormen, geldt dat in het bijzonder ook voor de automorfismen van één object. Bovendien vormen de automorfismen met samenstelling een groep.

Voor x_0 in een topologische ruimte X bekijken we dus $\mathrm{Aut}(x_0)$. Uit de axioma's voor de categorie $\Pi(X)$ weten we dat het samenstellen van homotopieklassen van lussen in x_0 associatief is. De identiteit op x_0 wordt gegeven door de klasse $[\mathbb{1}_{x_0}]$. In een groepoïde zijn alle pijlen isomorfismen en bovendien is de inverse van een automorfisme van x_0 weer een automorfisme van x_0. Hiermee hebben we geverifieerd dat $\mathrm{Aut}(x_0)$ met samenstelling van homotopieklassen van lussen in x_0 inderdaad een groep is. Deze groep kennen we echter al: dit is namelijk precies de fundamentaalgroep $\pi_1(X, x_0)$ van X met basispunt x_0. Hiermee hebben we dus bewezen:

Propositie 3.7. *Voor een fundamentaalgroepoïde $\Pi(X)$ bij een topologische ruimte (X, τ) geldt: voor elke $x \in X$ is $\mathrm{Aut}(x)$ gelijk aan $\pi_1(X, x)$.* □

Het bewijs dat gegeven is voor deze propositie gaat in het algemeen goed. Dus: in het algemeen kan de stap van een groepoïde naar een groep worden gemaakt, namelijk door de automorfismegroep van één object te bekijken tezamen met samenstelling van de pijlen uit die groep. In deze zin kan een groep dus gezien worden als een groepoïde met één object.

3.3 Π en π_1 als functoren

Tot nu toe zijn de notaties Π en π_1 alleen bekend in combinatie met een topologische ruimte X en eventueel een basispunt $x_0 \in X$. Echter, Π en π_1 kunnen ook als categorische objecten worden gezien, namelijk als functoren. In deze sectie worden twee stellingen bewezen die aangeven hoe dit precies in zijn werk gaat.

Om voor een fundamentaalgroep een basispunt te kiezen in een topologische ruimte, hebben we een nieuwe categorie nodig. Dit is de categorie $\mathbf{Top^0}$ van gepunte topologische ruimten. Deze categorie heeft als objecten gepunte topologische ruimten, dat wil zeggen paren $((X, \tau), x_0)$ waar (X, τ) een topologische ruimte is en $x_0 \in X$ een vast gekozen element, ofwel een basispunt. Voor het gemak schrijven we voor de objecten meestal (X, x_0) en laten de topologie achterwege. De pijlen in $\mathbf{Top^0}$ zijn continue afbeeldingen zodat het basispunt behouden blijft. Dus $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ is een pijl in $\mathbf{Top^0}$ als $f : X \to Y$ continu is en bovendien $f(x_0) = y_0$. Met behulp van deze categorie kunnen we de volgende stelling formuleren.

Stelling 3.8. *Met de toekenning:*

- $\pi_1 : (X, x_0) \mapsto \pi_1(X, x_0)$ *voor objecten* (X, x_0) *in* $\mathbf{Top^0}$,
- $\pi_1 : f \mapsto ([\alpha] \mapsto [f \circ \alpha])$ *voor pijlen* $f : (X, x_0) \to (X, f(x_0))$ *in* $\mathbf{Top^0}$ *en lussen* α *in* x_0,

is π_1 *een functor van* $\mathbf{Top^0}$ *naar* $\mathbf{Grp}$.

Bewijs. We gaan na dat π_1 aan Definitie 1.7 voldoet. Voor een topologische ruimte X met basispunt x_0 is de fundamentaalgroep $\pi_1(X, x_0)$ een groep, dus π_1 kent aan elk object van $\mathbf{Top^0}$ een object van $\mathbf{Grp}$ toe.
Als f een pijl $(X, x_0) \to (Y, f(x_0))$ is, dan zou $\pi_1(f)$ een groepshomomorfisme van $\pi_1(X, x_0)$ naar $\pi_1(Y, f(x_0))$ moeten zijn. Groepshomomorfismen zijn namelijk de pijlen in $\mathbf{Grp}$. Voor een homotopieklasse $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ is α een lus in x_0. Dan is $f \circ \alpha$ een lus in $f(x_0)$ en dus is $\pi_1(f)([\alpha]) = [f \circ \alpha] \in \pi_1(Y, f(x_0))$. Bovendien weten we uit Propositie 3.3 dat $[\alpha] = [\beta]$ impliceert $[f \circ \alpha] = [f \circ \beta]$, dus is $\pi_1(f)$ welgedefinieerd op de elementen van $\pi_1(X, x_0)$. Op dit moment is dus ook aan axioma (F1) voldaan.
Dat $\pi_1(f)$ een groepshomomorfisme is gaat analoog aan het bewijs van (F3) van Propositie 3.6, namelijk $\pi_1(f)([\beta][\alpha]) = \pi_1(f)([\beta * \alpha]) = [f \circ (\beta * \alpha)] = [(f \circ \beta) * (f \circ \alpha)] = \pi_1(f)([\beta])\pi_1(f)([\alpha])$.

Nu moet nog bewezen worden dat π_1 aan de axioma's (F2) en (F3) voldoet.
Voor $(X, x_0) \in \text{Ob}(\mathbf{Top^0})$ wordt de identiteit gegeven door $id_{(X,x_0)} : (X, x_0) \to (X, x_0)$, de identieke afbeelding op (X, x_0). Dan is $\pi_1(id_{(X,x_0)})$ het groepsendomorfisme op $\pi_1(X, x_0)$, gegeven door $[\alpha] \mapsto [id_{(X,x_0)} \circ \alpha]$. Uit de gelijkheid $id_{(X,x_0)} \circ \alpha = \alpha$ volgt echter dat $\pi_1(id_{(X,x_0)})$ de identieke afbeelding op $\pi_1(X, x_0)$ is. Dus $\pi_1(id_{(X,x_0)})$ is het eenheidselement van $\pi_1(X, x_0)$, ofwel $\pi_1(id_{(X,x_0)}) = 1_{\pi_1(X,x_0)}$. Dus π_1 voldoet aan axioma (F2).
Laten $f : (X, x_0) \to (Y, f(x_0))$ en $g : (Y, f(x_0)) \to (Z, (g \circ f)(x_0))$ twee morfismen in $\mathbf{Top^0}$ zijn. Dan zijn $\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ en $\pi_1(g) : \pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(Z, (g \circ f)(x_0))$ de twee groepshomomorfismen gegeven door $[\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$ respectievelijk $[\alpha] \mapsto [g \circ \alpha]$. Hun samenstelling is dan het groepshomomorfisme $[\alpha] \mapsto [g \circ (f \circ \alpha)]$ van $\pi_1(X, x_0)$ naar $\pi_1(Z, (g \circ f)(x_0))$. Anderzijds, als we eerst f en g samenstellen en daarna π_1 toepassen, krijgen we het groepshomomorfisme $[\alpha] \mapsto [(g \circ f) \circ \alpha]$ van $\pi_1(X, x_0)$ naar $\pi_1(Z, (g \circ f)(x_0))$. Omdat samenstelling van continue afbeeldingen associatief is, volgt in het bijzonder dat $[g \circ (f \circ \alpha)] = [(g \circ f) \circ \alpha]$, dus $\pi_1(g)\pi_1(f) = \pi_1(g \circ f)$. Dus π_1 voldoet aan axioma (F3).
Dus π_1 is een functor $\mathbf{Top^0} \to \mathbf{Grp}$. □

Eenzelfde soort stelling kan geformuleerd worden voor Π. De fundamentaalgroepoïde is een groepoïde, maar ook een kleine categorie, omdat de categorie **Grpd** een deelcategorie is van **Cat**. Er kan dus een keuze worden gemaakt voor het codomein van de functor Π. Hier kiezen we voor de specifiekere categorie **Grpd**.

Stelling 3.9. *Als $\Pi(f)$ gedefinieerd wordt zoals in Propositie 3.6, dan is Π een functor van* **Top** *naar* **Grpd** *door de toekenning:*

- $X \mapsto \Pi(X)$ *voor topologische ruimten* (X, τ),
- $f \mapsto \Pi(f)$ *voor continue afbeeldingen* $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$.

Bewijs. Wederom controleren we of Π voldoet aan Definitie 1.7. Met behulp van Propositie 3.5 en Propositie 3.6 is het duidelijk dat Π aan elk object respectievelijk elke pijl uit **Top** een object respectievelijk pijl uit **Grpd** toevoegt. Bovendien volgt uit Propositie 3.6 dat Π domeinen en codomeinen behoudt, dus Π voldoet aan axioma (F1).
Voor een topologische ruimte X wordt de identiteit in **Top** gegeven door door de identieke afbeelding id_X. Dan is $\Pi(id_X)$ een functor van $\Pi(X)$ naar zichzelf. Deze functor voegt aan elk object $x \in X$ het element $id_X(x) = x \in X$ toe. Dus $\Pi(id_X)$ is de identieke afbeelding op de objecten van $\Pi(X)$. Voor een pijl $[\alpha]$ in $\Pi(X)$ geldt dat $\Pi(id_X)([\alpha]) = [id_X \circ \alpha] = [\alpha]$, dus $\Pi(id_X)$ is ook de identieke afbeelding op de pijlen van $\Pi(X)$. Met andere woorden: $\Pi(id_X)$ is de identiteit van $\Pi(X)$ in **Grpd**, ofwel $\Pi(id_X) = 1_{\Pi(X)}$. Dus Π voldoet aan axioma (F2).
Laten $f : X \to Y$ en $g : Y \to Z$ twee continue afbeeldingen zijn. Dan zijn $\Pi(f) : \Pi(X) \to \Pi(Y)$ en $\Pi(g) : \Pi(Y) \to \Pi(Z)$ twee functoren in **Grpd** zoals gedefinieerd in Propositie 3.6. Dan is $\Pi(g)\Pi(f) : \Pi(X) \to \Pi(Z)$ de functor die aan elk object $x \in X$ het object $g(f(x)) \in Z$ toevoegt en aan elke pijl $[\alpha] \in \text{Mor}(\Pi(X))$ de pijl $[g \circ (f \circ \alpha)] \in \text{Mor}(\Pi(Z))$. Anderszijds, als we eerst f en g samenstellen en daarna Π toepassen, krijgen we de functor $\Pi(g \circ f) : \Pi(X) \to \Pi(Z)$ die aan elk object $x \in X$ het object $(g \circ f)(x) \in Z$ toevoegt en aan elke pijl $[\alpha] \in \text{Mor}(\Pi(X))$ de pijl $[(g \circ f) \circ \alpha] \in \text{Mor}(\Pi(Z))$. Uit associativiteit van samenstelling volgt direct dat $\Pi(g \circ f) = \Pi(g)\Pi(f)$. Dus Π voldoet aan axioma (F3).
Dus Π is een functor **Top** $\to$ **Grpd**. □

Hoofdstuk 4

Rekenen met Π

Met de voorgaande hoofdstukken hebben we genoeg voorbereiding gehad om de stelling van de Duitse respectievelijk Vlaamse wiskundigen Herbert Seifert en Egbert van Kampen te formuleren en bewijzen. De stelling zegt iets over hoe je de fundamentaalgroepoïde van een topologische ruimte kan bepalen aan de hand van de fundamentaalgroepoïden van zekere deelverzamelingen. Dit resultaat zie je niet direct in in de stelling zelf, maar komt meer in het bewijs naar voren. In de tweede sectie van dit hoofdstuk zullen we deze stelling toepassen om de fundamentaalgroep van de cirkel te bepalen.

4.1 Stelling van Seifert-Van Kampen

In het bewijs van de stelling van Seifert-Van Kampen wordt gebruik gemaakt van het lemma van Lebesgue over het Lebesguegetal. Een bewijs van dit lemma kan gevonden worden in [2], stelling 22.5.

Lemma 4.1 (Lebesgue)**.** *Zij X een compacte metrische ruimte met open overdekking $\mathcal{U}$. Dan bestaat er een reëel getal $\varepsilon > 0$ zodat voor elke $x \in X$ een $U \in \mathcal{U}$ bestaat zodat $B_\varepsilon(x) \subset U$. Hierin is $B_\varepsilon(x)$ de open bol met straal ε rond x en noemen we ε het* ***Lebesguegetal*** *van $\mathcal{U}$.*

Opmerking 4.2. *Het bewijs gegeven in* [2] *gaat slechts over een eindige overdekking $\mathcal{U}$. Echter, omdat we in bovenstaand lemma uitgaan van een compacte ruimte, kunnen we voor een willekeurige overdekking altijd een eindige overdekking vinden. Hiermee is dus ook een bewijs voor Lemma 4.1 gegeven.*

Het eerste doel van dit hoofdstuk is de stelling van Seifert-Van Kampen te bewijzen. Vanwege haar weinige voorwaarden is dit een zeer krachtige stelling. Zoals in de inleiding al genoemd is, bewees Ronald Brown eigenlijk de onderstaande stelling en het eerste gevolg daarvan.

Stelling 4.3 (Seifert-Van Kampen voor fundamentaalgroepoïden)**.** *Zij (X, ξ) een topologische ruimte en $X_0, X_1 \in \xi$ zodat $X = X_0 \cup X_1$. Dan is onderstaand diagram een pushout in* **Grpd**.

$$\begin{tikzcd}
\Pi(X_0 \cap X_1) \arrow[r, "\Pi(i_0)"] \arrow[d, "\Pi(i_1)"'] & \Pi(X_0) \arrow[d, "\Pi(j_0)"] \\
\Pi(X_1) \arrow[r, "\Pi(j_1)"'] & \Pi(X)
\end{tikzcd}$$

Hierin zijn $i_\nu : X_0 \cap X_1 \to X_\nu$ en $j_\nu : X_\nu \to X$ inclusies.

Bewijs. Omdat $\Pi(i_\nu)$ en $\Pi(j_\nu)$ inclusiefunctoren zijn, is het duidelijk dat het diagram commuteert, i.e. $\Pi(j_0)\Pi(i_0) = \Pi(j_1)\Pi(i_1)$. Stel nu Λ is een groepoïde en $h_\nu : \Pi(X_\nu) \to \Lambda$ zijn functoren zodanig dat $h_0\Pi(i_0) = h_1\Pi(i_1)$, zoals aangegeven in onderstaand diagram. Dan moeten we een functor $\lambda : \Pi(X) \to \Lambda$ construeren zodat aan de commuteringseisen is voldaan.

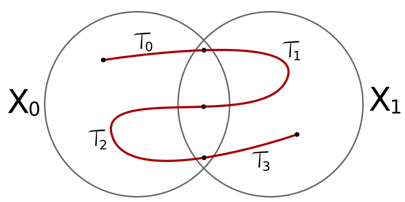
$$\begin{tikzcd}
 & \Pi(X_0) \arrow[dr, "\Pi(j_0)"] \arrow[drr, bend left, "h_0"] & & \\
\Pi(X_0 \cap X_1) \arrow[ur, "\Pi(i_0)"] \arrow[dr, "\Pi(i_1)"'] & & \Pi(X) \arrow[r, dotted, "\lambda"] & \Lambda \\
 & \Pi(X_1) \arrow[ur, "\Pi(j_1)"'] \arrow[urr, bend right, "h_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

Voor objecten $x \in X$, kan λ als volgt gedefinieerd worden:

$$\lambda(x) = \begin{cases} h_0(x) & \text{als } x \in X_0 \\ h_1(x) & \text{als } x \in X_1 \end{cases}.$$

Merk op dat dit een zinnige definitie is, omdat X overdekt wordt door X_0 en X_1. Verder is λ ook welgedefinieerd op objecten. Namelijk als $x \in X_0 \cap X_1$, dan $h_0(x) = h_0(\Pi(i_0)(x)) = h_1(\Pi(i_1)(x)) = h_1(x)$.
Om λ te definiëren op pijlen, wil je deze pijlen op een of andere manier terugbrengen naar pijlen in $\Pi(X_0)$ en $\Pi(X_1)$. Hiervoor is een kleine constructie nodig. Zij daarvoor $[\tau]$ een morfisme van x naar y in $\Pi(X)$. Dan is $\tau : [0,1] \to X$ een pad van x naar y, dus in het bijzonder is τ continu. Hieruit verkrijgen we de open overdekking $[0,1] = \tau^{-1}(X_0) \cup \tau^{-1}(X_1)$. Nu is $[0,1]$ compact en metrisch, dus volgt met Lemma 4.1 dat er een $\varepsilon > 0$ bestaat zodat voor elke $s \in [0,1]$: ofwel $B_\varepsilon(s) \subset \tau^{-1}(X_0)$ ofwel $B_\varepsilon(t) \subset \tau^{-1}(X_1)$. Gebruikmakend hiervan kunnen we een rij $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ kiezen zodat voor $n = 0, \ldots, N-1$ en $\nu = 0, 1$ geldt $\tau([t_n, t_{n+1}]) \subset X_\nu$. Het pad τ wordt dus opgedeeld in stukken die binnen de deelverzamelingen X_0 en X_1 liggen. De volgende afbeelding t definieert in welk van de deelverzamelingen deze stukken liggen. Definieer $t : \{0, \ldots, N-1\} \to \{0, 1\}$ zodat $\tau([t_n, t_{n+1}]) \subset X_{t(n)}$. Hierbij maak je een keuze voor $t(n)$ als $\tau([t_n, t_{n+1}]) \subset X_0 \cap X_1$. Definieer dan de paden $\tau_n := \tau|_{[t_n, t_{n+1}]}$ in $X_{t(n)}$. Dan geldt $\tau = \tau_{N-1} * \ldots * \tau_1 * \tau_0$. Definieer nu λ op $[\tau]$ door:

$$\lambda([\tau]) := h_{t(N-1)}([\tau_{N-1}]) \ldots\ h_{t(1)}([\tau_1]) h_{t(0)}([\tau_0]).$$



Figuur 4.1: Constructie λ op pijlen.

In deze constructie zijn een aantal keuzes gemaakt. Om te laten zien dat λ welgedefinieerd is op de pijlen van $\Pi(X)$, moeten we bewijzen dat λ onafhankelijk is van deze keuzes. Hiervoor moeten de volgende claims bewezen worden:

Claim (1): λ bestaat, i.e. de $h_{t(n)}$ zijn op deze manier samen te stellen.

Claim (2): λ is onafhankelijk van de keuze van t.

Claim (3): λ is onafhankelijk van de decompositie van $[0, 1]$.

Claim (4): λ is onafhankelijk van de representantskeuze τ.

Als deze claims bewezen zijn, hebben we laten zien dat λ welgedefinieerd is op zowel de objecten als pijlen van $\Pi(X)$. Om dan te laten zien dat het diagram in de stelling inderdaad een pushout is, moeten er nog een paar uitspraken bewezen worden.

Claim (5): λ is een functor en dus inderdaad een pijl in **Grpd**.

Claim (6): $\lambda\Pi(j_0) = h_0$ en $\lambda\Pi(j_1) = h_1$.

Claim (7): λ is uniek.

Deze claims zullen nu één voor één bewezen worden.

Bewijs (1): Als $t(n) = t(n+1)$, dan is de samenstelling $h_{t(n+1)}([\tau_{n+1}])h_{t(n)}([\tau_n])$ welgedefinieerd omdat h_0 en h_1 functoren zijn. Als voor $0 \leq n < N-1$ geldt $t(n) \neq t(n+1)$, dan $t(n+1) = 1-t(n)$. Dan is τ_n een pad van $\tau(t_n)$ naar $\tau(t_{n+1})$ in $X_{t(n)}$ en τ_{n+1} is een pad van $\tau(t_{n+1})$ naar $\tau(t_{n+2})$ in $X_{1-t(n)}$. Maar dan $\tau(t_{n+1}) \in X_0 \cap X_1$, dus $h_0(\tau(t_{n+1})) = h_1(\tau(t_{n+1}))$. Dus is het codomein van $h_{t(n)}([\tau_n])$ gelijk aan het domein van $h_{1-t(n)}([\tau_{n+1}])$ in Λ, dus is de pijl $h_{t(n+1)}([\tau_{n+1}])h_{t(n)}([\tau_n])$ in Λ welgedefinieerd. Merk op dat hiermee van alle gevallen is bewezen dat de samenstelling bestaat, behalve het geval $t(N-1) \neq t(N)$. Het bewijs van dit geval gaat analoog, omdat je in bovenstaande redenering net zo goed kan kijken naar τ_{n-1} en τ_n in plaats van naar τ_n en τ_{n+1}. Hiermee is de eerste claim bewezen. $\boxtimes$

Bewijs (2): Een keuze voor t wordt gemaakt als τ_n een pad is in $X_0 \cap X_1$. Stel daarom dat we een tweede afbeelding $t' : \{0, \ldots, N-1\} \to \{0, 1\}$ hebben zodanig dat $t'(n) = 1 - t(n)$. Dan volgt uit de commutativiteit $h_0\Pi(i_0) = h_1\Pi(i_1)$ dat $h_{t'(n)}([\tau_n]) = h_{t'(n)}\left(\Pi(i_{t'(n)})([\tau_n])\right) = h_{t(n)}\left(\Pi(i_{t(n)})([\tau_n])\right) = h_{t(n)}([\tau_n])$. Dus volgt dat $\lambda([\tau])$ gedefinieerd door t hetzelfde is als $\lambda([\tau])$ gedefinieerd door t'. $\boxtimes$

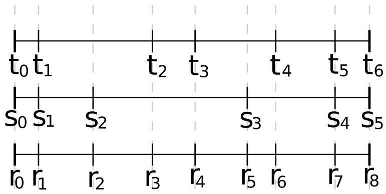
Bewijs (3): Stel er is een andere decompositie van het interval $0 = s_s < s_1 < \ldots < s_M = 1$ die τ opdeelt in paden in X_0 en X_1. Hierbij hebben we een afbeelding $s : \{0, \ldots, M-1\} \to \{0, 1\}$ zodat $\tau([s_m, s_{m+1}]) \subset X_{s(m)}$ en definiëren we $\sigma_m := \tau|_{[s_m, s_{m+1}]}$. Ten opzichte van deze decompositie geldt dan $\lambda([\tau]) := h_{s(M-1)}([\sigma_{M-1}]) \ldots\, h_{s(1)}([\sigma_1])h_{s(0)}([\sigma_0])$. Met de twee decomposities gegeven door de t_n en s_m creëren we inductief een nieuwe decompositie. Definieer daarvoor

$$S = \{t_n \mid n = 0, \ldots, N-1\} \cup \{s_m \mid m = 0, \ldots, M-1\}.$$

Dan wordt een nieuwe compositie egeven door $r_0 := 0$ en $r_{k+1} := \min\left(S - \{r_0, \ldots, r_k\}\right)$ voor $k = 0, \ldots, K-1$. Een voorbeeld hiervan zie je in figuur 4.2. Zij daarbij $r : \{0, \ldots, K-1\} \to \{0, 1\}$ zodat $\tau([r_k, r_{k+1}]) \subset X_{r(k)}$ en zij $\rho_k := \tau|_{[r_k, r_{k+1}]}$. Uit de eigenschappen van de functoren h_0 en h_1 volgt met deze tussenstap dan

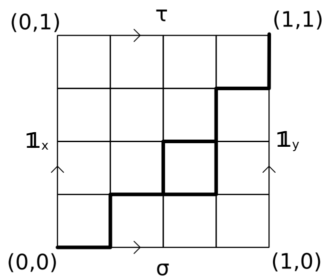
$$\begin{aligned} h_{s(M-1)}([\sigma_{M-1}]) \ldots\, h_{s(1)}([\sigma_1])h_{s(0)}([\sigma_0]) &= h_{r(K-1)}([\rho_{K-1}]) \ldots\, h_{r(1)}([\rho_1])h_{r(0)}([\rho_0]) \\ &= h_{t(N-1)}([\tau_{N-1}]) \ldots\, h_{t(1)}([\tau_1])h_{t(0)}([\tau_0]). \end{aligned}$$

Dus $\lambda([\tau])$ t.o.v. de decompositie t_n is hetzelfde als $\lambda([\tau])$ t.o.v. de decompositie s_m. $\boxtimes$



Figuur 4.2: Constructie decompositie r_k.

Bewijs (4): Stel $\sigma \sim \tau$ zijn beide representanten voor de pijl $[\tau]$ in $\Pi(X)$. Voor het pad τ bestaat de decompositie t_n met afbeelding t en paden τ_n zoals in het begin geconstrueerd. Voor het pad σ volgen we dezelfde constructie: stel we hebben de decompositie $0 = s_s < s_1 < \ldots < s_M = 1$ en de afbeelding $s : \{0, \ldots, M-1\} \to \{0,1\}$ zodat $\sigma([s_m, s_{m+1}]) \subset X_{s(m)}$. Definieer dan voor $m = 0, \ldots, M-1$ de paden $\sigma_m := \sigma|_{[s_m, s_{m+1}]}$. Dan wordt λ op de klasse $[\tau]$ dus op de volgende manieren gedefinieerd: $\lambda([\sigma]) = h_{s(M-1)}([\sigma_{M-1}]) \ldots\ h_{s(1)}([\sigma_1])h_{s(0)}([\sigma_0])$ en $\lambda([\tau]) = h_{t(N-1)}([\tau_{N-1}]) \ldots\ h_{t(1)}([\tau_1])h_{t(0)}([\tau_0])$. Het doel is te bewijzen dat deze twee uitdrukkingen gelijk zijn.
Omdat $\sigma \sim \tau$ bestaat er een padhomotopie $H : I \times I \to X$ van σ naar τ, dus H voldoet aan de gelijkheden $H(a,0) = \sigma(a)$, $H(a,1) = \tau(a)$, $H(0,b) = x$ en $H(1,b) = y$ voor alle $a, b \in I$. Omdat X overdekt wordt door X_0 en X_1, is $\{H^{-1}(X_0), H^{-1}(X_1)\}$ een open overdekking van $I \times I$. Nu is $I \times I$ compact en metrisch, dus volgt wederom met Lemma 4.1 dat er een $\delta > 0$ bestaat zodat voor alle $(a,b) \in I \times I$: ofwel $B_\delta((a,b)) \subset H^{-1}(X_0)$ ofwel $B_\delta((a,b)) \subset H^{-1}(X_1)$. Binnen elk van deze open bollen kunnen we een gesloten vierkant vinden: kies daarvoor $p \in \mathbb{N}$ zodanig dat $\frac{1}{p} < \delta$, dan geldt voor elke $(a,b) \in I \times I$ dat $V_{1/p}((a,b)) \subset B_\delta((a,b))$. Dan vinden we dus i.h.b. een opdeling van $I \times I$ in p^2 vierkantjes zodanig dat elk vierkantje door H afgebeeld wordt in ofwel X_0, ofwel X_1. Met andere woorden: we vinden een rooster in $I \times I$ zodat voor $i, j = 0, \ldots, p-1$ geldt $H([\frac{i}{p}, \frac{i+1}{p}] \times [\frac{j}{p}, \frac{j+1}{p}]) \subset X_\nu$.



Figuur 4.3: Rooster in $I \times I$.

Stel nu dat we twee paden over de roosterlijnen van $(0,0)$ naar $(1,1)$ bekijken, zodanig dat die twee paden op precies één vierkantje over verschillende kanten lopen, zoals in figuur 4.3. Door H toe te passen verkrijgen we twee paden in X. Doordat deze paden geconstrueerd zijn door een padhomotopie toe te passen, zijn deze twee paden padhomotoop. Bovendien verschillen de paden alleen op een subinterval, maar dit subinterval wordt door H binnen één van de X_ν afgebeeld. Omdat de h_ν functoren zijn, geven de klassen van deze twee homotope paden hetzelfde resultaat onder h_ν. Dan is het beeld onder λ dus ook onafhankelijk van deze representantskeuze.
Door dit inductief toe te passen, weten we dat λ hetzelfde is gedefinieerd op de twee klassen van

paden die verkregen worden door over de de buitenste kanten van het rooster te lopen. Door toepassen van H levert dit precies $\lambda([\tau * \mathbb{1}_x]) = \lambda([\mathbb{1}_y * \sigma])$. Echter, $\lambda([\tau * \mathbb{1}_x]) = \lambda([\tau])$ door herparametriseren van $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ en evenzo $\lambda([\mathbb{1}_y * \sigma]) = \lambda([\sigma])$ door herparametriseren van $0 = s_s < s_1 < \ldots < s_M = 1$. Hiermee is dus $\lambda([\tau]) = \lambda([\sigma])$ bewezen en dus is λ onafhankelijk van representantskeuze. ⊠

Nu hebben we bewezen dat λ welgedefinieerd is op de pijlen van $\Pi(X)$ en dus is λ nu welgedefinieerd op $\Pi(X)$. Nu zullen de laatste drie claims bewezen worden.

Bewijs (5): Uit de constructie blijkt eigenlijk al dat λ een functor is. Om dit te verduidelijken zullen we hier kort iets over zeggen. Aan elk object of elke pijl van $\Pi(X)$ voegt λ een object of pijl van Λ toe, omdat de h_ν functoren zijn. Daaruit volgt bovendien dat λ domeinen en codomeinen behoudt, dus dat λ aan axioma (F1) voldoet. Bekijk de identiteit $[\mathbb{1}_x]$ bij een object $x \in X$. Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat x een element is van X_0. Dan is $\mathbb{1}_x$ een pad in X_0 en dus kan als decompositie $0 = t_0 < t_1 = 1$ gekozen worden. Maar dan $\lambda([\mathbb{1}_x]) = h_0([\mathbb{1}_x]) = 1_{h_0(x)} = 1_{\lambda(x)}$. Hieruit volgt dat λ identiteiten behoudt en dus voldoet aan axioma (F2). Zij nu $[\sigma]$ en $[\tau]$ twee pijlen in $\Pi(X)$ zodanig dat $\tau * \sigma$ een pad in X is. Dit betekent dus precies dat de klassen $[\sigma]$ en $[\tau]$ samenstelbaar zijn. Laten in de constructie de decomposities s_m resp. t_n zijn, de afbeeldingen s resp. t en laten de paddelen gegeven zijn door σ_m resp. τ_n ($0 \leq m \leq M-1$, $0 \leq n \leq N-1$). Dan wordt de samenstelling van het beeld onder λ in Λ gegeven door:

$$\lambda([\tau])\lambda([\sigma]) = h_{t(N-1)}([\tau_{N-1}]) \ldots h_{t(0)}([\tau_0]) h_{s(M-1)}([\sigma_{M-1}]) \ldots\ h_{s(0)}([\sigma_0]).$$

Omdat $\tau * \sigma$ een pad is in X, kunnen we voor dit pad ook een decompositie geven en wel zodanig dat $\lambda([\tau * \sigma])$ precies de uitdrukking hierboven is. Namelijk, door herparametriseren geven de s_m en t_n een decompositie van $[0,1]$ voor het pad $\tau * \sigma$. De parametrisering wordt bijvoorbeeld gegeven door:

$$\begin{array}{ll} r_k := \frac{1}{2} s_k & k = 0, \ldots, M-1, \\ r_{k+M-1} := \frac{1}{2}(t_k + 1) & k = 1, \ldots, N-1. \end{array}$$

De decompositie r_k geeft het gewenste resultaat $\lambda([\tau * \sigma]) = \lambda([\tau])\lambda([\sigma])$ en hiermee voldoet λ dus ook aan axioma (F3). Dus λ is inderdaad een functor. ⊠

Bewijs (6): We bewijzen hier de gelijkheid $\lambda\Pi(j_0) = h_0$. Het bewijs voor de gelijkheid $\lambda\Pi(j_1) = h_1$ gaat precies hetzelfde. Omdat dit een samenstelling is van functoren moeten we controleren of beide kanten van het gelijkteken hetzelfde doen op objecten en pijlen van $\Pi(X_0)$. Als $x \in X_0$ een object is, dan geldt $h_0(x) = \lambda(x) = \lambda(\Pi(j_0)(x))$. Dus op objecten is aan de commutatie voldaan.
Stel nu dat $[\sigma]$ een morfisme is in X_0, dan is σ een pad in X_0 en kan de decompositie van $[0,1]$ dus gegeven worden door $0 = s_0 < s_1 = 1$. Dan geldt dus dat $\lambda(\Pi(j_0)([\sigma])) = \lambda([\sigma]) = h_0([\sigma])$. Dus ook op de pijlen is aan de commutatie voldaan. Dus geldt de gelijkheid $\lambda\Pi(j_0) = h_0$ van functoren. ⊠

Bewijs (7): Dat λ uniek is volgt direct uit de commuteringseis gegeven in claim (6). ⊠

Met deze drie laatste claims is het bewijs voor de stelling gegeven. □

De stelling van Seifert-Van Kampen is zeer krachtig, omdat de enige voorwaarde is dat een topologische ruimte overdekt wordt door twee open deelverzamelingen. Zoals al genoemd, bestaat er ook een versie van de stelling van Seifert-Van Kampen voor fundamentaalgroepen. Hoewel deze laatste stelling eerder bestond, kan deze bewezen worden als gevolg van Stelling 4.3. Voordat we dit doen, is het handig eerst te kijken naar een generalisatie van bovenstaande stelling. Deze generalisatie is dus ook het werk van Brown. De bewijzen van de gevolgen in deze sectie zijn gebaseerd op de bewijzen zoals gegeven in [7].

Gevolg 4.4. *Voor $A \subset X$ zij $\Pi_A(X)$ de volle deelgroepoïde van $\Pi(X)$ met objecten in A. Als alle padcomponenten van X_0, X_1 en $X_0 \cap X_1$ een niet-lege doorsnede hebben met A, dan is onderstaand diagram ook een pushout in* **Grpd**.

$$\begin{tikzcd} \Pi_A(X_0 \cap X_1) \arrow[r, "\Pi(i_0)"] \arrow[d, "\Pi(i_1)"'] & \Pi_A(X_0) \arrow[d, "\Pi(j_0)"] \\ \Pi_A(X_1) \arrow[r, "\Pi(j_1)"'] & \Pi_A(X) \end{tikzcd}$$

Opmerking 4.5. *In dit gevolg wordt met de 'volle deelgroepoïde' de deelcategorie $\Pi_A(X)$ van $\Pi(X)$ met objecten in A bedoeld, zodanig dat voor elk tweetal objecten $x, y \in A$ geldt $\mathrm{Mor}_{\Pi_A(X)}(x,y) = \mathrm{Mor}_{\Pi(X)}(x,y)$. Dit is dus sterker dan de definitie van een deelgroepoïde (1.3). In dat geval zou er alleen moeten gelden $\mathrm{Mor}_{\Pi_A(X)}(x,y) \subset \mathrm{Mor}_{\Pi(X)}(x,y)$.*

In het bewijs van dit gevolg maken we gebruik van het volgende lemma. Omdat we dit resultaat maar eenmalig nodig hebben, stellen we het hier zonder bewijs. Een bewijs kan gevonden worden in [4], stelling 6.6.7.

Lemma 4.6. *Zij $\mathcal{C}$ een categorie. Laten* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$ *objecten van $\mathcal{C}_\square$ zijn zodanig dat* $\mathbf{A}$ *een pushout is in $\mathcal{C}$. Als er in $\mathcal{C}_\square$ een retractie $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ bestaat, dan is ook* $\mathbf{B}$ *een pushout in $\mathcal{C}$.*

Bewijs (4.4). De verzameling $Q = \{X_0 \cap X_1, X_0 - X_1, X_1 - X_0\}$ is een partitie van X. Noteer met $P_U(x)$ de padcomponent van x in U, waar $U \in Q$ en $x \in U$. Dan is $P_U(x)$ dus de verzameling van alle punten $y \in U$ zodat er een pad tussen x en y bestaat. We gaan nu een aantal nuttige retracties construeren.

Voor $x \in X$, bepaal de unieke $U \in Q$ zodat $x \in U$. Volgens de aanname is de doorsnede $A \cap P_U(x)$ niet leeg, dus er is een pad in U van x naar een punt in A. Dit punt in A noemen we $R_U(x)$. Het gevonden pad van x naar $R_U(x)$ in U geven we dan aan met φ_x. Als $x \in A$ kiezen we $\varphi_x = \mathbb{1}_x$. Voor $U \in Q$ definiëren we nu $R_U : \Pi(U) \to \Pi_A(U)$ als volgt:

$$\begin{array}{lll} x & \mapsto & R_U(x) & \text{voor objecten } x \in U \\ [\alpha] & \mapsto & [\varphi_y * \alpha * \varphi_x^{-1}] & \text{voor pijlen } [\alpha] : x \to y \end{array} .$$

Deze drie afbeeldingen noemen we in het vervolg $R_{X_0 \cap X_1}$, R_{X_0} en R_{X_1}. Verder definiëren we nog een vierde toekenning $R_X : \Pi(X) \to \Pi_A(X)$. Op de pijlen van $\Pi(X)$ blijft de definitie zoals die van R_U. Op de objecten maken we gebruik van de partitie en definiëren:

$$R_X(x) = \begin{cases} R_{X_0}(x) & \text{als } x \in X_0 \\ R_{X_0 \cap X_1}(x) & \text{als } x \in X_0 \cap X_1 \\ R_{X_1}(x) & \text{als } x \in X_1 \end{cases} .$$

De toekenningen hierboven geven vier functoren en dus vier pijlen in **Grpd**. We zullen dit bewijzen voor R_{X_0}, de bewijzen voor R_{X_1}, $R_{X_0 \cap X_1}$ en R_X gaan analoog.

We gaan na of R_{X_0} voldoet aan Definitie 1.7. Het beeld $R_{X_0}(x)$ van $x \in X_0$ is een element van A en dus een object van $\Pi_A(X_0)$. Voor een pijl $[\alpha] : x \to y$ is φ_x een pad van x naar $R_{X_0}(x)$ en φ_y een pad van y naar $R_{X_0}(y)$, beide in X_0. Dus $\varphi_y * \alpha * \varphi_x^{-1}$ is een pad van $R_{X_0}(x)$ naar $R_{X_0}(y)$ in X_0. Daarmee kent R_{X_0} aan elke pijl van $\Pi(X_0)$ een pijl van $\Pi_A(X_0)$ toe en voldoet deze aan axioma (F1). Voor $x \in X_0$ geldt $R_{X_0}([\mathbb{1}_x]) = [\varphi_x * \mathbb{1}_x * \varphi_x^{-1}] = [\varphi_x * \varphi_x^{-1}] = [\mathbb{1}_{R_{X_0}(x)}]$, dus voldoet R_{X_0} aan axioma (F2). Als $[\alpha] : x \to y$ en $[\beta] : y \to z$ in X_0, dan gelden de gelijkheden

$$\begin{aligned} R_{X_0}([\beta * \alpha]) &= [\varphi_z * \beta * \alpha * \varphi_x^{-1}] \\ &= [\varphi_z * \beta * \varphi_y^{-1} * \varphi_y * \alpha * \varphi_x^{-1}] \\ &= [\varphi_z * \beta * \varphi_y^{-1}][\varphi_y * \alpha * \varphi_x^{-1}] \\ &= R_{X_0}([\beta])R_{X_0}([\alpha]). \end{aligned}$$

Dus R_{X_0} voldoet aan axioma (F3) en is inderdaad een functor.
Als we bovendien voor $U \in Q \cup \{X\}$ de inclusie $\Pi_A(U) \to \Pi(U)$ aangeven met I_U, dan zien we dat de vier functoren zelfs retracties zijn, namelijk $R_U \circ I_U = id_{\Pi_A(U)}$. Hieruit is gemakkelijk in te zien dat het viertal $(R_{X_0 \cap X_1}, R_{X_0}, R_{X_1}, R_X)$ een retractie is in de categorie $\mathbf{Grpd}_\square$. Dit geeft ons het volgende kubische diagram, waarin voor het gemak alle inclusies zijn weggelaten. Ook is vanwege de ruimte de doorsnede aangegeven met X_{01}.

$$\begin{tikzcd}
\Pi(X_{01}) \arrow[rr] \arrow[dr, "R_{X_{01}}"'] \arrow[dd] & & \Pi(X_0) \arrow[dr, "R_{X_0}"] \arrow[dd] & \\
& \Pi_A(X_{01}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \Pi_A(X_0) \arrow[dd] \\
\Pi(X_1) \arrow[rr] \arrow[dr, "R_{X_1}"'] & & \Pi(X) \arrow[dr, "R_X"] & \\
& \Pi_A(X_1) \arrow[rr] & & \Pi_A(X)
\end{tikzcd}$$

Nu is volgens Stelling 4.3 de achterzijde van die diagram een pushout, dus volgt met Lemma 4.6 dat de voorzijde ook een pushout is in de categorie **Grpd**. □

Het laatste onderdeel van deze sectie is het formuleren en bewijzen van de stelling van Seifert-Van Kampen voor fundamentaalgroepen. Dit werk is wel verricht door Seifert en Van Kampen zelf.

Gevolg 4.7 (Seifert-Van Kampen voor fundamentaalgroepen)**.** *Zij (X, ξ) een topologische ruimte en $X_0, X_1 \in \xi$ zodat $X = X_0 \cup X_1$. Zij verder $X_0 \cap X_1$ padsamenhangend en zij $x \in X_0 \cap X_1$. Dan is onderstaand diagram een pushout in* **Grp**.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X_0 \cap X_1, x) \arrow[r, "\pi_1(i_0)"] \arrow[d, "\pi_1(i_1)"'] & \pi_1(X_0, x) \arrow[d, "\pi_1(j_0)"] \\
\pi_1(X_1, x) \arrow[r, "\pi_1(j_1)"'] & \pi_1(X, x)
\end{tikzcd}$$

Hierin zijn $i_\nu : X_0 \cap X_1 \to X_\nu$ en $j_\nu : X_\nu \to X$ inclusies.

In het bewijs van deze stelling is het belangrijk dat je een groep kunt zien als een groepoïde met één object, zoals in hoofdstuk 3 al genoemd is. Voor een topologische ruimte Z en basispunt z kunnen we de de fundamentaalgroep $\pi_1(Z, z)$ zien als de categorie $\Pi_{\{z\}}(Z)$, de volle deelgroepoïde van $\Pi(Z)$ met als enige object z. Als bovendien $P(z)$ de padcomponent van z is, dan is de categorie $\Pi_{\{z\}}(Z)$ gelijk aan de categorie $\Pi_{\{z\}}(P(z))$, omdat elk pad vanuit z logischerwijs geheel binnen de padcomponent van z ligt.

Bewijs. Zij $P(x)$ de padcomponent van x, schrijf dan $Y_0 = P(x) \cap X_0$ en $Y_1 = P(x) \cap X_1$. Willen we vorig gevolg toepassen op $P(x) = Y_0 \cup Y_1$ en $A = \{x\}$, dan moeten we laten zien dat x een element is van elke padcomponent van Y_0, Y_1 en $Y_0 \cap Y_1$. Omdat $Y_0 \cap Y_1$ padsamenhangend is en x bevat, is de claim hiervoor duidelijk. Zij nu $y \in Y_0$, dan $y \in P(x)$, dus er bestaat een pad α van y naar x in $P(x)$. Dit pad hoeft echter niet geheel binnen Y_0 te liggen. Als dit het geval is, kies dan een $t \in I$ zodanig dat $\alpha(s) \in Y_0$ voor alle $s \leq t$ en bovendien $\alpha(t) \in Y_0 \cap Y_1$. Omdat $Y_0 \cap Y_1$ padsamenhangend is en x bevat, kunnen we een pad β vinden van $\alpha(t)$ naar x in $Y_0 \cap Y_1$. Dan is $\beta * \alpha|_{[0,t]}$ een pad van y naar x in Y_0 en dus is x een element van de padcomponent van y in Y_0. Het bewijs voor Y_1 gaat analoog. Uit het vorige gevolg verkrijgen we nu een pushout

$$\begin{tikzcd} \Pi_{\{x\}}(Y_0 \cap Y_1) \arrow[r, "\Pi(i_0)"] \arrow[d, "\Pi(i_1)"'] & \Pi_{\{x\}}(Y_0) \arrow[d, "\Pi(j_0)"] \\ \Pi_{\{x\}}(Y_1) \arrow[r, "\Pi(j_1)"'] & \Pi_{\{x\}}(P(x)) \end{tikzcd}$$

maar dit is precies het diagram dat we wilden bereiken. □

Opmerking 4.8. *De stelling van Seifert-Van Kampen voor fundamentaalgroepen heeft een extra eis ten opzichte van die voor fundamentaalgroepoïden. Natuurlijk moet er een basispunt gekozen worden dat in de doorsnede $X_0 \cap X_1$ ligt, maar bovendien moet die doorsnede padsamenhangend zijn. Deze eigenschap wordt ook gebruikt in het bewijs, maar de bewering is zelfs niet waar zonder deze aanname.*

Om deze opmerking uit te leggen, stel dat de padsamenhangendheid van $X_0 \cap X_1$ niet noodzakelijk was. Dan kunnen we de cirkel overdekken door $X_0 = S^1 - \{1\}$ en $X_1 = S^1 - \{-1\}$. Dan zijn de groepen $\pi_1(X_0 \cap X_1, x)$, $\pi_1(X_0, x)$ en $\pi_1(X_1, x)$ voor $x \in X_0 \cap X_1$ triviaal. Echter, de pushout geeft dan voor $\pi_1(S^1, x)$ ook de triviale groep. In de volgende sectie zullen we zien dat dit niet het geval is.

4.2 Fundamentaalgroep van de cirkel

Eén van de basisobjecten waar de algebraïsche topologie naar kijkt, is de cirkel S^1. In deze sectie proberen we de fundamentaalgroep van de cirkel te bepalen. De klassieke methode om dit te doen gebruikt overdekkingen van de cirkel samen met het liften van paden en homotopieën. Deze methode wordt behandeld in het vak 'Topologie', zie ook [1]. In deze sectie worden twee andere manieren beschreven waarmee de fundamentaalgroep beschreven kan worden.

Wie al enige ervaring met topologie heeft, zou intuïtief wel kunnen inzien dat de fundamentaalgroep van de cirkel isomorf is met de gehele getallen. Je telt van een pad op de cirkel namelijk gewoon hoe vaak (en in welke richting) je het basispunt passeert. Merk op dat het niet uitmaakt welk punt je tot basispunt verkiest, omdat de cirkel zelf padsamenhangend is. Daarom schrijven we voor de fundamentaalgroep van de cirkel alleen $\pi_1(S^1)$.
Voor een bewijs van het vermoeden over de gehele getallen, kunnen we helaas niet de stelling van Seifert-Van Kampen voor fundamentaalgroepen gebruiken. Dit komt doordat de cirkel niet te overdekken is door twee open verzamelingen zodanig dat de doorsnede padsamenhangend is en bovendien het basispunt in de doorsnede ligt. Om toch de fundamentaalgroep van S^1 te bepalen, gaan we in deze sectie kijken naar de fundamentaalgroepoïde $\Pi(S^1)$.

4.2.1 Bepalen $\pi_1(S^1)$ met behulp van Stelling 4.3

De cirkel kan vanuit de reële getallen gegeven worden door een continue surjectieve afbeelding, namelijk $p : \mathbb{R} \to S^1,\ a \mapsto \exp(2\pi i a)$. Met behulp van deze afbeelding kunnen we een pad op de cirkel intuïtief beschrijven. Voor een pad van a naar b op de cirkel kiezen we als domein het object $a \in S^1$. Vervolgens kiezen we $t \in \mathbb{R}$ zodanig dat $p(t) = b$. Bovendien houden we bij de keuze van deze t rekening met hoe vaak we het basispunt, zeg 1, gepasseerd zijn. Bekijken we bijvoorbeeld een pad van 1 naar -1 op de cirkel, dan $a = 1$ en we zouden $t = \frac{1}{2}$ kunnen kiezen. Net zo goed zou $t = \frac{3}{2}$ voldoen, als we een extra rondje over de cirkel lopen. Willen we liever met de klok mee lopen, dan zouden we $t = -\frac{1}{2}$ kunnen kiezen. Met dit idee definiëren we een categorie $\mathcal{G}$, gegeven door:

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{Ob}(\mathcal{G}) & = & S^1 \\ \mathrm{Mor}(\mathcal{G}) & = & S^1 \times \mathbb{R} \end{array}.$$

Voor een pijl (a,t) definiëren we $\mathrm{dom}((a,t)) := a$ en $\mathrm{cod}((a,t)) := a \cdot p(t)$. De identiteit op een object $a \in S^1$ wordt gegeven door $(a,0)$ en samenstelling door $(b,t)(a,s) := (a, s+t)$ als $b = a \cdot p(s)$.

Lemma 4.9. *De categorie $\mathcal{G}$ is een groepoïde.*

Bewijs. Duidelijk is dat de objecten en pijlen van $\mathcal{G}$ verzamelingen zijn. De pijl $(a,t) : a \to a \cdot p(t)$ heeft een inverse $(a \cdot p(t), -t) : a \cdot p(t) \to a$, namelijk: $(a \cdot p(t), -t)(a,t) = (a,0) = 1_a$ en $(a,t)(a \cdot p(t), -t) = (a \cdot p(t), 0) = 1_{a \cdot p(t)}$. Deze laatste vermenigvuldiging is toegestaan omdat $a = a \cdot p(0) = a \cdot p(t) \cdot p(-t)$. $\square$

Het doel van deze sectie is nu om te laten zien dat de groepoïde $\mathcal{G}$ precies de fundamentaalgroepoïde $\Pi(S^1)$ is. Als dit bewezen is, kunnen we daaruit heel gemakkelijk de fundamentaalgroep van de cirkel bepalen.

Schrijf $X_0 = S^1 - \{1\}$ en $X_1 = S^1 - \{-1\}$, dan is $\{X_0, X_1\}$ een open overdekking van de cirkel. Omdat X_0 en X_1 isomorf zijn met open intervallen in $\mathbb{R}$, zijn deze samentrekbaar. In het bijzonder zijn X_0 en X_1 dan enkelvoudig samenhangend, want betekent dat ze padsamenhangend zijn en bovendien dat elk tweetal paden met hetzelfde begin- en eindpunt padhomotoop zijn. Schrijf daarom $(a,b)_\nu$ voor de unieke klasse van paden van a naar b in X_ν.
Door de toekenning $s \mapsto \exp(2\pi i s)$ hebben we bijecties $f_0 : (0,1) \to X_0$ en $f_1 : (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to X_1$. Met behulp van deze afbeeldingen definiëren we $\gamma_\nu : \Pi(X_\nu) \to \mathcal{G}$ door:

$$\begin{array}{lcl} a & \mapsto & a \\ (a,b)_\nu & \mapsto & \left(a, f_\nu^{-1}(b) - f_\nu^{-1}(a)\right) \end{array}.$$

Lemma 4.10. *Bovenstaande toekenning geeft functoren $\gamma_\nu : \Pi(X_\nu) \to \mathcal{G}$.*

Bewijs. We bewijzen alleen dat γ_0 een functor is. Voor γ_1 gaat het bewijs analoog. Duidelijk is dat γ_0 aan objecten en pijlen van $\Pi(X_0)$ objecten en pijlen van $\mathcal{G}$ toekent. Merk op dat de bijectie f_0 precies de afbeelding p is, alleen dan beperkt op het domein $(0,1)$. Hieruit volgt de pijl $\left(a, f_0^{-1}(b) - f_0^{-1}(a)\right)$ domein a heeft en codomein

$$\begin{array}{rcl} a \cdot p\left(f_0^{-1}(b) - f_0^{-1}(a)\right) & = & \exp\left(2\pi i \left(f_0^{-1}(a) + f_0^{-1}(b) - f_0^{-1}(a)\right)\right) \\ & = & \exp\left(2\pi i f_0^{-1}(b)\right) \\ & = & f_0\left(f_0^{-1}(b)\right) \\ & = & b \end{array}$$

gebruik makend van de gelijkheid $a = f_0\left(f_0^{-1}(a)\right) = \exp\left(2\pi i f_0^{-1}(a)\right)$. We kunnen nu concluderen dat γ_0 domeinen en codomeinen behoudt en dus aan axioma (F1) voldoet. De identiteit op een object a in $\Pi(X_0)$ wordt gegeven door $(a,a)_0$. Onder γ_0 gaat deze pijl naar $\left(a, f_0^{-1}(a) - f_0^{-1}(a)\right) = (a,0) = 1_a$, dus γ_0 voldoet ook aan axioma (F2). Voor twee samenstelbare pijlen $(a,b)_0$ en $(b,c)_0$ in $\Pi(X_0)$ gelden de volgende gelijkheden:

$$\begin{aligned}\gamma_0((a,c)_0) &= \left(a, f_0^{-1}(c) - f_0^{-1}(a)\right)\\ &= \left(c, f_0^{-1}(c) - f_0^{-1}(b)\right)\left(a, f_0^{-1}(b) - f_0^{-1}(a)\right)\\ &= \gamma_0((b,c)_0)\gamma_0((a,b)_0).\end{aligned}$$

Dus γ_0 voldoet aan axioma (F3) en is dus een functor. $\square$

Met deze twee functoren is de voorbereiding om de fundamentaalgroepoïde van S^1 algebraïsch uit te drukken nog niet afgerond. Daarom definiëren we ook $\zeta : \mathcal{G} \to \Pi(S^1)$ door:

$$\begin{array}{lcl} a & \mapsto & a \\ (a,t) & \mapsto & [\alpha_{(a,t)}] \end{array},$$

waar $\alpha_{(a,t)}$ het pad $s \mapsto a \cdot \exp(2\pi i t s)$ van a naar $a \cdot p(t)$ in S^1 is. De tweede toekenning zorgt er dus voor dat de (abstracte) pijl (a,t) gestuurd wordt naar zijn (concrete) klasse van paden op de cirkel. Ook ζ blijkt een functor te zijn.

Lemma 4.11. *Bovenstaande toekenning geeft een functor $\zeta : \mathcal{G} \to \Pi(S^1)$.*

Bewijs. Duidelijk is dat ζ aan elk object respectievelijk elke pijl van $\mathcal{G}$ een object respectievelijk pijl van $\Pi(S^1)$ toekent. Bovendien volgt uit de uitleg boven dit lemma dat aan axioma (F1) is voldaan. Voor een object $a \in S^1$ is $(a,0)$ de identiteit op a in $\mathcal{G}$. Het pad $\alpha_{(a,0)}$ is het pad dat constant de waarde a aanneemt. Dus hebben we $\zeta(1_a) = \zeta((a,0)) = [\alpha_{(a,0)}] = [\mathbb{1}_a] = 1_{\zeta(a)}$ en dus voldoet ζ aan axioma (F2).
Stel (a,s) en (b,t) zijn twee pijlen in $\mathcal{G}$ zodanig dat $b = a \cdot p(s)$. Dan hebben we door samenstelling in $\mathcal{G}$ enerzijds $\zeta\big((a\cdot p(s),t)(a,s)\big) = \zeta((a,s+t)) = [\alpha_{(a,s+t)}]$, waar $\alpha_{(a,s+t)}$ is het pad gegeven door $u \mapsto a \cdot p(u(s+t))$. Anderszijds, door samenstelling in $\Pi(S^1)$ krijgen we $\zeta\big((a\cdot p(s),t)\big)\zeta\big((a,s)\big) = [\alpha_{(a\cdot p(s),t)}][\alpha_{(a,s)}] = [\alpha_{(a\cdot p(s),t)} * \alpha_{(a,s)}]$, waar $\alpha_{(a\cdot p(s),t)} * \alpha_{(a,s)}$ is het pad gegeven door

$$u \mapsto \begin{cases} a \cdot p(2us) & \text{als } 0 \le u \le \frac{1}{2} \\ a \cdot p(s + (2u-1)t) & \text{als } \frac{1}{2} \le u \le 1 \end{cases}.$$

De paden $\alpha_{(a,s+t)}$ en $\alpha_{(a\cdot p(s),t)} * \alpha_{(a,s)}$ zijn niet gelijk, want ze verschillen in doorloopsnelheid. Wel zijn de paden padhomotoop en een padhomotopie wordt gegeven door

$$(u,v) \mapsto \begin{cases} a \cdot p\big(2u(\frac{1}{2}v(s+t) + (1-v)s)\big) & \text{als } 0 \le u \le \frac{1}{2} \\ a \cdot p\big(\frac{1}{2}v(s+t) + (1-v)s + (2u-1)(t + s - \frac{1}{2}v(s+t) + (v-1)s)\big) & \text{als } \frac{1}{2} \le u \le 1 \end{cases}.$$

Hiermee volgt $\zeta\big((a\cdot p(s),t)(a,s)\big) = [\alpha_{(a,s+t)}] = [\alpha_{(a\cdot p(s),t)} * \alpha_{(a,s)}] = \zeta\big((a\cdot p(s),t)\big)\zeta\big((a,s)\big)$, dus ζ voldoet aan axioma (F3) en is dus een functor. $\square$

Nu we voor γ_0, γ_1 en ζ hebben bewezen dat het functoren zijn en dus pijlen in de categorie **Grpd**, kunnen we onderstaand diagram in **Grpd** opschrijven. Bovendien zijn de functoren zo geconstrueerd, dat het diagram commuteert.

$$\begin{tikzcd}
 & \Pi(X_0) \arrow[dr, "\Pi(j_0)"] \arrow[drr, bend left, "\gamma_0"] & & \\
\Pi(X_0 \cap X_1) \arrow[ur, "\Pi(i_0)"] \arrow[dr, "\Pi(i_1)"'] & & \Pi(S^1) & \mathcal{G} \arrow[l, "\zeta"] \\
 & \Pi(X_1) \arrow[ur, "\Pi(j_1)"'] \arrow[urr, bend right, "\gamma_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

In het diagram geldt dus $\gamma_0\Pi(i_0) = \gamma_1\Pi(i_1)$ en ook $\zeta\gamma_\nu = \Pi(j_\nu)$. Daarnaast herkennen we in het linkergedeelte van het diagram de pushout van $\Pi(i_0)$ en $\Pi(i_1)$ volgens Stelling 4.3. Daarmee kunnen we laten zien dat $\mathcal{G}$ eigenlijk precies $\Pi(S^1)$ is.

Propositie 4.12. *De functor ζ is een isomorfisme.*

Bewijs. Omdat de buitenste pijlen van het diagram commuteren, vinden we door de pushout een unieke functor $\gamma : \Pi(S^1) \to \mathcal{G}$ zodanig dat $\gamma\Pi(j_\nu) = \gamma_\nu$. Uit de uniciteit van γ volgt dat dit de enige kandidaatinverse voor ζ is. We laten zien dat γ inderdaad de inverse van ζ is.
De gelijkheden $\gamma\Pi(j_\nu) = \gamma_\nu$ kunnen op twee manieren gecombineerd worden met de gelijkheden $\zeta\gamma_\nu = \Pi(j_\nu)$. Enerzijds verkrijgen we zo, door γ_ν in de laatste vergelijking te vervangen door de eerste, de relaties $\zeta\gamma\Pi(j_\nu) = \Pi(j_\nu)$. Echter, uit het bewijs van Stelling 4.3 blijkt dat elke pijl in $\Pi(S^1)$ te schrijven is als samenstelling van pijlen uit $\Pi(X_0)$ en $\Pi(X_1)$, ofwel dat de pijlen van $\Pi(S^1)$ voortgebracht worden door de beelden van $\Pi(j_0)$ en $\Pi(j_1)$. Hierdoor mogen we uit de vergelijking $\zeta\gamma\Pi(j_\nu) = \Pi(j_\nu)$ direct concluderen dat $\zeta\gamma = 1_{\Pi(S^1)}$.
Anderzijds verkrijgen we door bovengenoemde vergelijkingen te combineren, de relaties $\gamma\zeta\gamma_\nu = \gamma_\nu$. Om te laten zien dat dit genoeg is om te bewijzen dat $\gamma\zeta = 1_\mathcal{G}$, gaan we op analoge wijze te werk: we laten zien dat de pijlen in $\mathcal{G}$ voortgebracht worden door de beelden van γ_0 en γ_1. Zij daarvoor $(a, t) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{G})$ een pijl van a naar $b := a \cdot p(t)$. Dan kunnen we het reële getal t schrijven als $t = t_1 + \ldots + t_N$ zodanig dat $|t_n| < \frac{1}{2}$ voor elke n. Definieer $a_0 := a$ en $a_n := a \cdot p(t_1 + \ldots + t_n)$, dan geldt $(a, t) = (a_{N-1}, t_N) \ldots (a_1, t_2)(a_0, t_1)$ in de groepoïde $\mathcal{G}$. Omdat X_0 en X_1 isomorf zijn met open intervallen van lengte 1 door de afbeeldingen f_0 en f_1 en we $|t_n| < \frac{1}{2}$ gekozen hebben, volgt dat er een afbeelding $T : \{1, \ldots, N\} \to \{0, 1\}$ bestaat zodanig dat het pad $s \mapsto a_{n-1} \cdot \exp(2\pi i t_n s)$ geheel binnen $X_{T(n)}$ ligt. Maar dan geldt $(a_{n-1}, t_n) = \gamma_{T(n)}((a_{n-1}, a_n)_{T(n)})$. Dus op analoge wijze als in Stelling 4.3 krijgen we

$$(a, t) = \gamma_{T(N)}((a_{N-1}, a_N)_{T(N)}) \ldots \gamma_{T(2)}((a_1, a_2)_{T(2)})\gamma_{T(1)}((a_0, a_1)_{T(1)}).$$

Dus de pijlen in $\mathcal{G}$ worden inderdaad voortgebracht door de beelden van γ_0 en γ_1 en dus is de vergelijking $\gamma\zeta\gamma_\nu = \gamma_\nu$ voldoende om te kunnen concluderen $\gamma\zeta = 1_\mathcal{G}$. $\square$

Zoals in hoofdstuk 3 al is besproken, kan de fundamentaalgroep $\pi_1(S^1)$ bepaald worden door te kijken naar een automorfismegroep van een object in $\Pi(S^1)$. Omdat het niet uitmaakt naar welk basispunt we kijken, kiezen we hiervoor het object $1 \in S^1$.
De automorfismegroep van 1 in $\mathcal{G}$ bestaat precies uit alle pijlen $(1, t)$ waarvoor $\exp(2\pi i t) = 1$. Laatste gelijkheid geldt precies als t een geheel getal is. Dus kunnen we uiteindelijk het volgende concluderen:

$$\pi_1(S^1) \cong \pi_1(S^1, 1) \cong \mathrm{Aut}_{\Pi(S^1)}(1) \cong \mathrm{Aut}_\mathcal{G}(1) \cong \{(1, t) \mid t \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}.$$

4.2.2 Bepalen $\pi_1(S^1)$ met behulp van Gevolg 4.4

In de vorige paragraaf waren toch nog redelijk wat stappen nodig om tot $\pi_1(S^1)$ te komen. Wat nog niet zo mooi is aan de methode daar, is dat de afbeelding $p : \mathbb{R} \to S^1$, $a \mapsto \exp(2\pi i a)$ vaak gebruikt wordt. De methode gebruikt dus een expliciete beschrijving van de cirkel. In deze paragraaf proberen we $\pi_1(S^1)$ op een meer elegante manier te bepalen, namelijk door naar de generalisatie van Stelling 4.3 te kijken. Deze werd geformuleerd in Gevolg 4.4.

Wederom overdekken we de cirkel door de open, samentrekbare verzamelingen $X_0 = S^1 - \{1\}$ en $X_1 = S^1 - \{-1\}$. Met dezelfde notatie uit de vorige paragraaf geven we met $\alpha_0 := (i, -i)_0$ de unieke homotopieklasse van paden van i naar $-i$ in X_0 aan. Dan bevat $\Pi_A(X_0)$ precies vier pijlen, namelijk α_0, zijn inverse en de twee identiteiten op i respectievelijk $-i$. Evenzo hebben we $\Pi_A(X_1)$, waarin we $\alpha_1 := (-i, i)_1$ schrijven voor de unieke pijl van $-i$ naar i. Deze twee groepoïden zijn dus eigenlijk precies de tree groupoid met twee objecten, die besproken is in hoofdstuk 2. De groepoïde $\Pi_A(X_0 \cap X_1)$ bevat alleen de twee identiteiten.
Als we $A = \{1, -1\}$ kiezen, dan heeft A een niet-lege doorsnede met alle padcomponenten van X_0, X_1 en hun doorsnede. Wederom definiëren we een categorie $\mathcal{G}$, waarvan we laten zien dat deze isomorf is aan $\Pi(S^1)$. Als objecten van $\mathcal{G}$ nemen we elementen van A. De pijlen definiëren we als volgt:

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{Mor}(i,i) & = & \{\beta^n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \\ \mathrm{Mor}(i,-i) & = & \{\alpha_0\beta^n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \\ \mathrm{Mor}(-i,i) & = & \{\beta^n\alpha_0^{-1} \mid n \in \mathbb{Z}\}, \\ \mathrm{Mor}(-i,-i) & = & \{\alpha_0\beta^n\alpha_0^{-1} \mid n \in \mathbb{Z}\}. \end{array}$$

Hierin is β de pijl $\alpha_1\alpha_0$. Merk op dat elke pijl van $\mathcal{G}$ een samenstelling is van β en α_0. Uit de vorm van deze pijlen is duidelijk dat $\mathcal{G}$ een groepoïde is. Door $\alpha_0 \mapsto \alpha_0$ ligt de inclusie $g_0 : \Pi_A(X_0) \to \mathcal{G}$ vast. Evenzo is de inclusie $g_1 : \Pi(X_1) \to \mathcal{G}$ vast door $\alpha_1 \mapsto \alpha_1 = \beta\alpha_0^{-1}$. Omdat het inclusies zijn, is het duidelijk dat g_0 en g_1 functoren zijn. Hiermee kunnen we het volgende commutatieve diagram opschrijven.

$$\begin{tikzcd} \Pi_A(X_0 \cap X_1) \arrow[r, "\Pi(i_0)"] \arrow[d, "\Pi(i_1)"'] & \Pi_A(X_0) \arrow[d, "g_0"] \\ \Pi_A(X_1) \arrow[r, "g_1"'] & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

Bovendien is dit diagram een pushout. Stel hiervoor dat we een groepoïde Λ hebben en twee functoren $h_\nu : \Pi_A(X_\nu) \to \Lambda$ zodat $h_0\Pi(i_0) = h_1\Pi(i_1)$. Om een functor $k : \mathcal{G} \to \Lambda$ te contrueren, is het genoeg k te definiëren op α_0 en β. Deze beelden liggen echter vast door de commuteringseis van het diagram. Enerzijds hebben we namelijk $k(\alpha_0) = (k \circ g_0)(\alpha_0) = h_0(\alpha_0)$. Anderzijds moet gelden $k(\alpha_1) = (k \circ g_1)(\alpha_1) = h_1(\alpha_1)$, dus in het bijzonder $k(\beta) = k(\alpha_1)k(\alpha_0) = h_1(\alpha_1)h_0(\alpha_0)$.

$$\begin{tikzcd} & \Pi_A(X_0) \arrow[dr, "g_0"] \arrow[drr, bend left, "h_0"] & & \\ \Pi_A(X_0 \cap X_1) \arrow[ur, "\Pi(i_0)"] \arrow[dr, "\Pi(i_1)"'] & & \mathcal{G} \arrow[r, dotted, "k"] & \Lambda \\ & \Pi_A(X_1) \arrow[ur, "g_1"'] \arrow[urr, bend right, "h_1"'] & & \end{tikzcd}$$

Op de objecten $\{i, -i\}$ zijn h_0 en h_1 gelijk, omdat de buitenste pijlen van het diagram een commutatief vierkant vormen. We kunnen k op de objecten dus als h_0 definiëren. Op deze manier hebben we een functor vastgelegd. De uniciteit van k volgt uit de commuteringseisen.

Doordat we de cirkel overdekt hebben met X_0 en X_1 kunnen we nog een commutatief diagram opschrijven. Volgens Gevolg 4.4 is dit diagram ook een pushout.

$$\begin{tikzcd}
\Pi_A(X_0 \cap X_1) \arrow[r, "\Pi(i_0)"] \arrow[d, "\Pi(i_1)"'] & \Pi_A(X_0) \arrow[d, "\Pi(j_0)"] \\
\Pi_A(X_1) \arrow[r, "\Pi(j_1)"'] & \Pi_A(S^1)
\end{tikzcd}$$

Uit de uniciteit van een pushout kunnen we nu concluderen dat $\Pi(S^1)$ isomorf is aan $\mathcal{G}$. Nu kunnen we wederom de fundamentaalgroep van de cirkel bepalen door te kijken naar een automorfismegroep. Als basispunt kiezen we nu $i \in S^1$. Hiermee is een ander bewijs voltooid.

$$\pi_1(S^1) \cong \pi_1(S^1, i) \cong \mathrm{Aut}_{\Pi(S^1)}(i) \cong \mathrm{Aut}_{\mathcal{G}}(i) \cong \{\beta^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}.$$

Bibliografie

[1] Theodore W. Gamelin, Robert Everist Greene, *Introduction to Topology*, Dover Publications, New York, 2e editie, 1999.

[2] Stephen Willard, *General Topology*, Dover Publications, New York, 2004.

[3] Tammo tom Dieck, *Algebraic Topology*, European Mathematical Society, Zürich, 2008. Secties 2.5-2.7.

[4] Ronald Brown, *Topology and Groupoids*, Booksurge LLC, Charleston (South Carolina), 3e editie, 2006. Secties 6.1-6.2, 6.5-6.7.

[5] Steve Awodey, *Category Theory*, Oxford University Press, Oxford, 2e editie, 2010. Secties 1.1-1.5, 3.2.

[6] Arlan Ramsay, Jean Renault, *Groupoids in Analysis, Geometry and Physics*, American Mathematical Society, Providence (Rhode Island), 2001. Secties 1.1-1.3.

[7] Gerd Laures, Markus Szymik, *Grundkurs Topologie*, Springer Spektrum, Heidelberg, 2009. Secties 7.1-7.2.

[8] Ronald Brown, *From groups to groupoids: a brief survey*, Bull. London Math. Soc. 19 (113-134), 1987.