Tentamen Gewone Differentiaal Vergelijkingen I (B kans)

21.02.2007

Opgave 1 *Geef alle oplossingen van de differentiaal vergelijking*

$$y(1+xy)\,dx - x\,dy = 0$$

aan. (Er is een multiplicator $M(y)$.)

Opgave 2 *(Reductiemethode van d'Alembert)*
Bekijk de lineaire differentiaalvergelijking

$$y''(x) - y'(x)\cos x + y(x)\sin x = 0.$$

(a) Laat zien dat

$$y_1(x) = e^{\sin x}$$

een oplossing is.

(b) Voor een tweede oplossing, probeer

$$y_2(x) = y_1(x)w(x).$$

Dit geeft een differentiaalvergelijking voor w'. Substituteer $v = w'$, bereken de oplossing $v(x)$ en integreer om $w(x)$ te krijgen.

Opgave 3 *Geef reëelle fundamentaalsystemen van oplossingen voor de differentiaalvergelijking $y'(x) = Ay(x)$ waar*

$$(a)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (b)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad (c)\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Opgave 4 *Geef een basis voor de oplossingsruimte van*

$$y''''' - y'''' + 2y''' - 10y'' + 13y' - 5y = 0.$$

(Gebruik de direkte methode voor lineaire n-de orde vergelijkingen, niet de reductie op een stelsel!)

Oplossingen

Oplossing 1 We vermenigvuldigen de d.v. met $M(y)$ en krijgen $\tilde{a}(x,y)dx + \tilde{b}(x,y)dy = 0$, waar

$$\tilde{a}(x,y) = (y + xy^2)M(y), \qquad \tilde{b}(x,y) = -xM(y).$$

Opdat de d.v. exact is moet $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$, ofwel

$$(1 + 2xy)M(y) + (y + xy^2)M'(y) = -M(y).$$

Dit is equivalent aan $2M(y) + yM'(y)$, waarvan de oplossingen zijn:

$$M(y) = C/y^2.$$

Nu zoeken we een oplossing van

$$\frac{\partial E}{\partial x} = (y + xy^2)/y^2 = \frac{1}{y} + x, \qquad \frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}.$$

De tweede vergelijking wordt opgelosd door

$$E(x,y) = \frac{x}{y} + \phi(x),$$

en als we dit in de eerste inzetten zien we dat $\phi(x) = x^2/2$, dus

$$E(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2}.$$

De algemene oplossing is dus

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C,$$

ofwel

$$y(x) = \frac{2x}{2C - x^2}.$$

Oplossing 2 (a) Met $y(x) = e^{\sin x}$ geldt

$$\begin{aligned} y'(x) &= \cos x \cdot e^{\sin x} \\ y''(x) &= (\cos^2 x - \sin x)e^{\sin x}, \end{aligned}$$

Inzetten in de d.v.:

$$e^{\sin x}\left((\cos^2 x - \sin x) - \cos^2 x + \sin x\right) = 0,$$

dus $y_1(x) = e^{\sin x}$ is een oplossing.

(b) Met $y = wy_1$ geldt

$$y' = w'y_1 + wy_1', \qquad y'' = w''y_1 + 2w'y_1' + wy_1'',$$

en dus

$$\begin{aligned} y'' - y'\cos x + y\sin x &= w''y_1 + 2w'y_1' + wy_1'' - (w'y_1 + wy_1')\cos x + wy_1\sin x \\ &= w\cdot(y_1'' - y_1'\cos x + y_1\sin x) + w''y_1 + 2w'y_1' - w'y_1\cos x \\ &= w''y_1 + 2w'y_1' - w'y_1\cos x, \end{aligned}$$

waar we gebruikt hebben dat y_1 aan de d.v. voldoet. Dus, y is een oplossing van de d.v. d.e.s.d.a.

$$w''y_1 + 2w'y_1' - w'y_1\cos x = 0.$$

Met de substitutie $v = w'$ en inzetten van y_1 wordt dit

$$e^{\sin x}(v' + v(2\cos x - \cos x)) = 0,$$

dus $v' + v\cos x = 0$. Dit heeft de oplossing

$$v(x) = Ce^{-\sin x},$$

dus

$$w(x) = C\int_{x_0}^{x} e^{-\sin t}dt.$$

Een fundamentaalsysteem voor de oorspronkelijke g.d.v. is dus:

$$\left\{e^{\sin x}, \qquad e^{\sin x}\int_0^x e^{-\sin t}dt\right\}.$$

Oplossing 3 (a) De charakteristieke veelterm is

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (1-\lambda)(-\lambda)(-1-\lambda) + 8 - 2(1-\lambda) - 4(1+\lambda) \\ &= \lambda(1-\lambda^2) - 2\lambda + 2 \\ &= -\lambda^3 - \lambda + 2 \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 2) \end{aligned}$$

Dus:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}.$$

Nu is

$$A - \lambda_1\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

en een oplossing van $(A - \lambda_1\mathbf{1})v = 0$ is $v_1 = (1, 0, 2)^T$. Voor $\lambda_2 = (-1 + \sqrt{7}i)/2$ vinden we de eigenvector $v_2 = (1, (3 - \sqrt{7}i)/4, (3 - \sqrt{7}i)/2)^T$. De eigenvector voor $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$ is de complex geconiugeerde van v_2. Daarmee hebben we het volgende fundamentaalsysteem:

$$\left\{e^x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e^{\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}x}\begin{pmatrix} 1 \\ (3-\sqrt{7}i)/4 \\ (3-\sqrt{7}i)/2 \end{pmatrix}, \quad e^{\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}x}\begin{pmatrix} 1 \\ (3+\sqrt{7}i)/4 \\ (3+\sqrt{7}i)/2 \end{pmatrix}\right\}$$

Een reell fundamentaalsysteem is

$$\left\{e^x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ e^{-x/2}\begin{pmatrix} \cos\sqrt{7}x \\ (3\cos\sqrt{7}x + \sqrt{7}\sin\sqrt{7}x)/4 \\ (3\cos\sqrt{7}x + \sqrt{7}\sin\sqrt{7}x)/2 \end{pmatrix}, \ e^{-x/2}\begin{pmatrix} \sin\sqrt{7}x \\ (3\sin\sqrt{7}x - \sqrt{7}\cos\sqrt{7}x)/4 \\ (3\sin\sqrt{7}x - \sqrt{7}\cos\sqrt{7}x)/2 \end{pmatrix}\right\}$$

(b) De charakteristieke veelterm is

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(-3-\lambda) - (-4) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2.$$

Er is dus een dubbele eigenwaarde $\lambda = -1$. We hebben $A - \lambda\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, de eigenvector(en) $x = (x_1, x_2)^T$ voor $\lambda = -1$ moeten dus voldoen aan $2x_1 - x_2 = 0$, en een oplossing is $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Gezien er maar een eigenvector is, zoeken we nu een vector v waarvoor $(A - \lambda\mathbf{1})v = x$, dus

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

ofwel $2v_1 - v_2 = 1$. Een oplossing hiervan is $v = (1,1)^T$. Daarmee hebben we het volgende fundamentaalsysteem:

$$\left\{ e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e^{-x} \begin{pmatrix} 1+x \\ 1+2x \end{pmatrix} \right\}$$

(c) De charakteristieke veelterm is

$$P(\lambda) = (2-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda - 4).$$

Voor $\lambda = 0$ krijgen is de vergelijking voor de eigenvector (x_1, x_2): $2x_1 - 4x_2 = 0$, met oplossing $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Voor $\lambda = 4$ krijgen is de vergelijking voor de eigenvector (x_1, x_2): $-2x_1 - 4x_2 = 0$, met oplossing oplossing $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Daarmee hebben we het volgende fundamentaalsysteem:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e^{4x} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Oplossing 4 Met $y(x) = e^{kx}$ krijgen we door inzetten in de d.v.:

$$e^{kx}(k^5 - k^4 + 2k^3 - 10k^2 + 13k - 5) = 0.$$

De veelterm $P(k) = k^5 - k^4 + 2k^3 - 10k^2 + 13k - 5$ heeft een nulpunt bij $k = 1$. Verder:

$$\begin{aligned} k^5 - k^4 + 2k^3 - 10k^2 + 13k - 5 &= (k-1)(k^4 + 2k^2 - 8k + 5) \\ &= (k-1)^2(k^3 + k^2 + 3k - 5) \\ &= (k-1)^3(k^2 + 2k + 5). \end{aligned}$$

De nulpunten van $k^2 + 2k + 5$ zijn $-1 \pm 2i$. Daarmee is een fundamentaalsystem van oplossingen gegeven door

$$\left\{ e^x,\ xe^x,\ x^2e^x,\ e^{(-1+2i)x},\ e^{(-1-2i)x} \right\}.$$

Een reell fundamentalsysteem is:

$$\left\{ e^x,\ xe^x,\ x^2e^x,\ e^{-x}\cos 2x,\ e^{-x}\sin 2x \right\}.$$