Tentamen Gewone Differentiaal Vergelijkingen I, 2006

November 20, 2006

Opgave 1 *(a) Zij $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ en $g, h \in C^1(\Omega)$ met $h \neq 0$ op Ω. Bekijk de differentiaalvergelijking*

$$g(x, y) + h(x, y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

We willen weten of er een allen van x afhankelijke integrerende factor $M(x)$ is zodanig dat $M(x)g(x, y) + M(x)h(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$ exact is. Laat zien dat dit geldt d.e.s.d.a.

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}}{h}$$

alleen van x afhangt.

Hint: *Gebruik het differentiaal-criterium voor de exactheid van een vergelijking van de vorm $a + by' = 0$.*

(b) Bekijk de differentiaalvergelijking

$$(2x^2 + 2xy^2 + 1)y + (3y^2 + x)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Geef een integrerende factor $M(x)$ aan (liefst door (a) te gebruiken) en los de vergelijking impliciet op. (Oplossen naar y wordt niet verwacht.)

Opgave 2 *Bepaal de algemene oplossing van*

$$y'(x) + \sin(x)y(x) = \sin^3(x)$$

door variatie der constanten. (Dit kan expliciet uitgewerkt worden.)

Zie vervolg op achterkant!!

Opgave 3 *Geef reëlle fundamentaalsystemen van oplossingen voor de differentiaalvergelijking* $y'(x) = Ay(x)$ *waar*

$$(a)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 22 & -11 \\ 0 & -17 & 9 \\ 0 & -38 & 20 \end{pmatrix}, \quad (b)\quad A = \begin{pmatrix} 6 & 25 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad (c)\quad A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Opgave 4 *Bekijk de differentiaalvergelijking*

$$u''(t) + 2au'(t) + \omega^2 u(t) = C \cos \omega(t).$$

(a) Geef alle reëlle oplossingen aan, voor $0 < a < \omega$ *en* $C > 0$.

(b) Laat zien dat $\limsup_{t\to\infty} |u(t)|$ *alleen van* C, a, ω *afhangt.*
(Herinnering: $\limsup_{t\to\infty} f(t) := \lim_{t\to\infty} \sup_{s\geq t} f(s)$.*)*

(c) Bonusopgave: Doe (a) voor $a = 0$.

Oplossingen

Oplossing 1 (a) Gezien Ω enkelvuidig samenhangend is, is de vergelijking

$$g(x,y) + h(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

exact (dus er is $F \in C^1(\Omega)$ zodaning dat $\partial_x F = g$, $\partial_y F = h$) d.e.s.d.a. $\partial_y g = \partial_x h$. Gegeven een differentierbare functie $x \mapsto M(x)$ geldt

$$\begin{aligned} \partial_y(M(x)g(x,y)) &= \partial_x(M(x)h(x,y)), \\ \Leftrightarrow \quad M\partial_y g &= M'h + M\partial_x h, \\ \Leftrightarrow \quad M(\partial_y g - \partial_x h) &= M'h \\ \Leftrightarrow \quad \frac{M'}{M} &= \frac{\partial_y g - \partial_x h}{h}. \end{aligned}$$

We concluderen: Als $M(x)$ een integrerende factor is, dan is $\frac{\partial_y g - \partial_x h}{h} = \frac{M'}{M}$ en daarom alleen van x afhankelijk. Omgekeerd, stel dat $\frac{\partial_y g - \partial_x h}{h}$ alleen van x afhangt. Noem deze functie, die natuurlijk continu is, $G(x)$. Dan voldoet

$$M(x) = e^{\int^x G(\xi)d\xi}$$

aan

$$\frac{M'}{M} = (\ln M)' = G(x)$$

en is daarom een integrerende factor.

(b) Voor

$$(2x^2 + 2xy^2 + 1)y + (3y^2 + x)\frac{dy}{dx} = 0$$

is $g(x,y) = (2x^2 + 2xy^2 + 1)y$ en $h(x,y) = 3y^2 + x$. Dus

$$\frac{\partial_y g - \partial_x h}{h} = \frac{2x^2 + 6xy^2 + 1 - 1}{3y^2 + x} = 2x.$$

Daarom is

$$M(x) = e^{x^2}$$

een integrerende factor, dus

$$e^{x^2}(2x^2 + 2xy^2 + 1)y + e^{x^2}(3y^2 + x)\frac{dy}{dx} = 0$$

exact. We zoeken nu een functie $F(x,y)$ zodanig dat

$$\partial_x F = e^{x^2}(2x^2 + 2xy^2 + 1)y, \qquad \partial_y F = e^{x^2}(3y^2 + x).$$

De twede vergelijking wordt door

$$F(x,y) = e^{x^2}(y^3 + xy) + \phi(x)$$

opgelosd. Inzetten in de eerste vergelijking levert $\phi \equiv 0$. De oplossingen van de differentiaalvergelijking voldoen dus aan

$$e^{x^2}(y^3 + xy) = C.$$

Oplossing 2 We kijken eerst naar de homogene vergelijking

$$y'(x) + \sin(x)y(x) = 0.$$

Scheiden van variablen levert

$$\int^y \frac{d\xi}{\xi} = -\int^x \sin\eta \; d\eta,$$

dus

$$\ln y(x) = \cos(x) + c \qquad \Rightarrow \; y(x) = Ce^{\cos(x)}.$$

Nu vervangen we de constante C door een functie $C(x)$ en zetten $y(x) = C(x)e^{\cos(x)}$ in de differentiaalvergelijking in:

$$y'(x) + \sin(x)y(x) = e^{\cos(x)}(C'(x) - C(x)\sin(x)) + C(x)\sin(x)e^{\cos(x)} = \sin^3(x),$$

dus

$$C'(x)e^{\cos(x)} = \sin^3(x),$$
$$C(x) = \int^x e^{-\cos(\xi)} \sin^3(\xi) d\xi.$$

We substitueren $z = \cos(\xi)$, dus $dz = -\sin(x)d\xi$:

$$\begin{aligned} C(x) &= -\int^{\cos(x)} e^{-z} \sin^2(\xi) dz \\ &= -\int^{\cos(x)} e^{-z}(1-z^2)dz \;=\; \int^{\cos(x)} e^{-z}(z^2-1)dz \end{aligned}$$

Een primitive voor e^{-z} is $-e^{-z}$ en partiële integratie levert

$$\int z^2 e^{-z} dz = -e^{-z}z^2 + 2\int z e^{-z} dz = -e^{-z}z^2 + 2\left(-ze^{-z} + \int e^{-z}dz\right) = -e^{-z}(z^2+2z+2).$$

Dus:

$$C(x) = \left[-e^{-z}(z^2+2z+2-1)\right]_0^{\cos x} = -e^{-\cos(x)}(\cos^2 x - 1 + 2\cos x + 2) + 1.$$

(De benedengrens is natuurlijk willekeurig gezien we toch een constante mogen optellen.) De algemene oplossing is nu

$$\underline{y(x)} = (C(x) + D)e^{\cos(x)} = \underline{\sin^2 x - 2\cos x - 2 + Ee^{\cos(x)}}.$$

Oplossing 3 (a) De characteristieke veelterm is

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)((-17-\lambda)(20-\lambda) - (-38)9) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2).$$

(Makkelijk te berekenen door de twee nullen in de eerste colom.) Duidelijk is er een nulpunt $\lambda_1 = 1$. De factor $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$ heeft de nulpunten

$$\lambda_{2,3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2},$$

dus $\lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$. Nu is

$$A - \lambda_{1/2}E = \begin{pmatrix} 0 & 22 & -11 \\ 0 & -18 & 9 \\ 0 & -38 & 19 \end{pmatrix}$$

Alle drie rijen hiervan zijn proportionaal aan $(0, 2, -1)$, de kern van deze matrix bestaat dus uit

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_2 - x_3 = 0\},$$

en we kunnen, bijvoorbeeld,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

als basis kiezen. Verder is

$$A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} -1 & 22 & -11 \\ 0 & -19 & 9 \\ 0 & -38 & 18 \end{pmatrix}.$$

De twede en derde rij leveren de vergelijking $-19x_2 + 9x_3 = 0$, waarvan $x_2 = 9, x_3 = 19$ een oplossing is. Als we dit in de eerste vergelijking $-x_1 + 22x_2 - 11x_3 = 0$ inzetten krijgen we $x_1 = 22 \cdot 9 - 11 \cdot 19 = -11$. Een eigenvector met eigenwaarde $\lambda_3 = 2$ is dus $(-11, 9, 19)^T$. Een basis van oplossingen van $y' = Ay$ is dus

$$\left\{ e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, e^{2x} \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 19 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) We hebben

$$P_A(\lambda) = (6 - \lambda)(-2 - \lambda) + 25 = \lambda^2 - 4\lambda + 13.$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm 3i.$$

(Deze eigenwaarden zijn complex geconjungeerde van elkaar omdat A en dus P_A reell zijn.)

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 4 - 3i & 25 \\ -1 & -4 - 3i \end{pmatrix}$$

De twee rijen zijn lineair afhankelijk, we hoeven dus allen een ervan op te lossen. De twede heeft $(4 + 3i, -1)^T$ als oplossing. Een oplossing van $y' = Ay$ is dus

$$y_1(x) = e^{(2+3i)x} \begin{pmatrix} 4 + 3i \\ -1 \end{pmatrix}$$

De twede oplossing y_2 moet de complex geconjugeerde van y_1 zijn. (We hoeven dus niet $(A - \lambda_2 E)x = 0$ op te lossen!) Daarom zijn de reelle en imaginaire gedeelte van y_1 onafhankelijke reelle oplossingen:

$$Re\, Y_1(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 4\cos(3x) - 3\sin(3x) \\ -\cos(3x) \end{pmatrix},$$

$$Im\, Y_1(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 4\sin(3x) + 3\cos(3x) \\ -\sin(3x) \end{pmatrix}.$$

(c)

$$P_A(\lambda) = (8-\lambda)(4-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 12\lambda + 36.$$
$$\lambda_{1,2} = 6 \pm \sqrt{36-36} = 6.$$
$$A - \lambda_{1,2}E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

De vergelijking $(A - \lambda_{1,2}E)x = 0$ levert $2x_1 + x_2 = 0$, de oplossingsruimte wordt dus door $(-1,2)^T$ opgespannen en heeft alleen dimensie een! De bijbehorende oplossing van $y' = Ay$ is

$$y_1(x) = e^{6x} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

We zijn in de situatie waar A niet diagonaliseerbaar is, maar alleen een Jordan normaalvorm heeft. Dankzij de algemene theorie weten we dat er nog en oplossing moet zijn, van de vorm

$$y_2(x) = e^{6x} \begin{pmatrix} A + Bx \\ C + Dx \end{pmatrix}.$$

Als we dit in $y' = Ay$ inzetten krijgen we

$$y'(x) = e^{6x} \begin{pmatrix} 6A + 6Bx + B \\ 6C + 6Dx + D \end{pmatrix} = e^{6x} \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A + Bx \\ C + Dx \end{pmatrix}.$$

en daarom het stelsel

$$6A + 6Bx + B = 8(A + Bx) + (C + Dx),$$
$$6C + 6Dx + D = -4(A + Bx) + 4(C + Dx).$$

Separeren naar x^0 en x^1 levert de vier vergelijkingen

$$6A + B = 8A + C,$$
$$6C + D = -4A + 4C.$$
$$6B = 8B + D,$$
$$6D = -4B + 4D.$$

De laatste twee zijn equivalent aan $2B+D = 0$, we mogen dus $B = 1, D = -2$ kiezen. De eerste twee vergelijkingen zijn equivalent aan $2A + C = B$. (NB: Als (A, C) en oplossing hiervan is, dan ook $(A + A', C + C')$ als $2A' + C' = 0$. Dit komt op het optellen van een veelvoud van de oplossing y_1 neer.) Een oplossing is $A = 0, C = 1$. We krijgen dus:

$$y_2(x) = e^{6x} \begin{pmatrix} x \\ 1 - 2x \end{pmatrix}.$$

Oplossing 4 We kijken weer eerst naar de homogene vergelijking

$$u'' + 2au' + \omega^2 u = 0,$$

en met $u(t) = e^{\lambda t}$ krijgen we de veeltermvergelijking

$$\lambda^2 + 2a\lambda + \omega^2 = 0$$

met de nulpunten

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - \omega^2} = -a + \pm i\sqrt{\omega^2 - a^2},$$

waar $\omega^2 - a^2 > 0$. We schrijven

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 - a^2}.$$

De oplossingen van de homogene vergelijking zijn nu de lineaire combinaties

$$Ae^{(-a+i\omega_0)t} + Be^{(-a-i\omega_0)t}.$$

Voor $B = A = 1/2$ en $A = -B = -i/2$, respectievelijk, krijgen we de reëele oplossingen

$$e^{-at}\cos(\omega_0 t), \qquad e^{-at}\sin(\omega_0 t).$$

Om een oplossing van de inhomogene vergelijking

$$u'' + 2au' + \omega^2 u = C\cos(\omega t)$$

de vinden proberen we

$$u(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t). \tag{1}$$

(Dit ligd voor de hand omdat we een periodische oplossing mogen verwachten.) De functies $A\sin(\omega t)$ en $B\cos(\omega t)$ voldoen aan $u'' + \omega^2 u = 0$, dus als we die in (1) inzetten blijft alleen

$$2a(A\omega\cos(\omega t) + B\omega\sin(\omega t)) = C\cos(\omega t).$$

Gezien de functies $\sin(\omega t)$ en $\cos(\omega t)$ lineair onafhankelijk zijn is er een unieke oplossing:

$$B = 0, \qquad 2aA\omega = C,$$

dus

$$u(t) = \frac{C}{2a\omega}\sin(\omega t).$$

De algemene reelle oplossing van (1) is dus

$$u(t) = Ae^{-at}\cos(\omega_0 t) + Be^{-at}\sin(\omega_0 t) + \frac{C}{2a\omega}\sin(\omega t), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

(b) De oplossingen $Ae^{-at}\cos(\omega_0 t) + Be^{-at}\sin(\omega_0 t)$ van de homogene vergelijking gaan naar nul als $t \to +\infty$. Dus: voor elke oplossing $u(t)$ van (1) geldt

$$\limsup_{t\to+\infty} |u(t)| = \limsup_{t\to+\infty} \left|\frac{C}{2a\omega}\sin(\omega t)\right| = \frac{C}{2a\omega}.$$

(c) Dit is het geval van ‘resonantie’. (De frequentie van de inhomogene storing is gelijk aan de frequentie $\omega = \omega_0$.) We proberen

$$u(t) = t(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)).$$

Hiermee:

$$u'(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)) + t(A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t)).$$
$$u''(t) = 2A\omega\cos(\omega t) - 2B\omega\sin(\omega t)) - tA\omega^2\sin(\omega t) - tB\omega^2\cos(\omega t)).$$

Dus

$$u''(t) + \omega^2 u(t) = 2A\omega\cos(\omega t) - 2B\omega\sin(\omega t)),$$

en dit is gelijk aan $C\cos(\omega t)$ d.e.s.d.a. $B = 0$ en $A = C/2\omega$. De algemene oplossing is dan

$$u(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{C}{2\omega}t\,\sin(\omega t), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Let op: Door de factor t is de oplossing onbegrensd.