

Hertentamen Gewone Differentiaal Vergelijkingen II

18.04.2007

Opgave 1 *Gegeven zijn parameters $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Begijk de lineaire tweede orde vergelijking*

$$z(z-1)u'' + \{(\alpha + \beta + 1)z - \gamma\}u' + \alpha\beta u = 0. \quad (1)$$

(a) *Bepaal alle waarden van λ zodanig dat een oplossing van de vorm*

$$u(z) = z^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (2)$$

met $a_0 \neq 0$ bestaat.

(b) *Bepaal de coëfficiënten a_n voor een oplossing met $\lambda = 0$ en $a_0 = 1$.*

(c) *Gebruik de definitie $(x)_k = x(x+1) \cdots (x+k-1)$ om een compacte uitdrukking voor a_n aan te geven.*

(d) *Bepaal de convergentiestraal van de oplossing uit (b-c).*

Opgave 2 (a) *Bepaal de Greensche functie voor het randwaardeprobleem*

$$\frac{d^2 y}{dx^2}(x) = f(x), \quad y(0) = y(1) = 0$$

op $[0, 1]$.

(b) *Laat $u \in C^2([0, 1])$ met $u(0) = u(1) = 0$. Gebruik (a) om*

$$v(x) = \int_0^x \xi(x-1)u''(\xi)d\xi + \int_x^1 (\xi-1)xu''(\xi)d\xi \quad (3)$$

te berekenen.

(c) *Geef een directe berekening van $v(x)$ door (3) partiël te integreren.*

Zie vervolg op achterkant!!

Opgave 3 (a) Bewijs dat voor iedere continue functie $f(x)$ op $[0, \frac{\pi}{2}]$ het randwaardeprobleem

$$Ly(x) = \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = f, \quad y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

precies een oplossing heeft.

(b) Substitueer $y(x) = A(x)z(x)$ en bepaal $A(x)$ en $b(x)$ zodanig dat

$$Ly(x) = A(x) \left[\frac{d^2z}{dx^2} + b(x)z \right].$$

(c) Gebruik (b) om het inhomogene randwaarde probleem (a) te herformuleren als

$$\frac{d^2u}{dx^2} + qu = g.$$

(d) Bepaal de oplossing van (c) met behulp van de Greensche functie.

(e) Gebruik (d) om het randwaarde probleem (a) op te lossen.

Oplossing 1

(a) Met (2) hebben we

$$\begin{aligned} u'(z) &= z^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\lambda)z^{n-1}, \\ u(z) &= z^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\lambda)(n+\lambda-1)z^{n-2} \end{aligned}$$

De vergelijking (1) is equivalent aan

$$z^2 u'' + (\alpha + \beta + 1)zu' + \alpha\beta u = zu'' + \gamma u',$$

en inzetten levert

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n [(n+\lambda)(n+\lambda-1) + (\alpha + \beta + 1)(n+\lambda) + \alpha\beta] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n-1} [(n+\lambda)(n+\lambda-1) + \gamma(n+\lambda)].$$

(De factor z^λ hebben we weggelaten.) Het linkerlid is dan gelijk aan

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n [(n+\lambda)(n+\lambda+\alpha+\beta) + \alpha\beta]$$

en het rechterlid aan

$$\sum_{n=-1}^{\infty} a_{n+1} z^n [(n+\lambda+1)(n+\lambda+\gamma)].$$

Vergelijking van coëfficiënten levert

$$n = -1 : \quad a_0 \lambda(\lambda + \gamma - 1) = 0, \quad (4)$$

$$n \geq 0 : \quad a_n [(n+\lambda)(n+\lambda+\alpha+\beta) + \alpha\beta] = a_{n+1} [(n+\lambda+1)(n+\lambda+\gamma)]. \quad (5)$$

Uit (4) volgt met $a_0 \neq 0$

$$\lambda(\lambda + \gamma - 1) = 0, \quad \text{dus} \quad \lambda \in \{0, 1 - \gamma\}.$$

(b) De term links in (5) kunnen we nog herschrijven:

$$(n+\lambda)(n+\lambda+\alpha+\beta) + \alpha\beta = (n+\lambda)^2 + (n+\lambda)(\alpha+\beta) + \alpha\beta = (n+\lambda+\alpha)(n+\lambda+\beta).$$

Dus

$$a_n (n+\lambda+\alpha)(n+\lambda+\beta) = a_{n+1} (n+1)(n+\gamma)$$

ofwel

$$a_{n+1} = a_n \frac{(n+\lambda+\alpha)(n+\lambda+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)}.$$

Met $\lambda = 0$ en $a_0 = 1$ krijgen we

$$a_n = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \cdot \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(\gamma+1)} \dots \frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{n(\gamma+n-1)}$$

(c)

$$a_n = \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}.$$

(d) We hebben

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)},$$

en voor $n \rightarrow \infty$ convergeert dit naar 1. De convergentiestraal is dus 1.

Oplossing 2

(a) De Green'sche functie is

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -(1-x)\xi & \text{als } \xi \leq x \\ -x(1-\xi) & \text{als } x \leq \xi \end{cases}$$

(Zie Duistermaat/Eckhuis.)

(b) Met (a) zien we dat

$$v(x) = \int_0^x \xi(x-1)u''(\xi)d\xi + \int_x^1 (\xi-1)xu''(\xi)d\xi = \int_0^1 G(x, \xi)u''(\xi)d\xi,$$

dus: $v(x)$ is de unieke oplossing van

$$v''(x) = u''(x), \quad v(0) = v(1) = 0.$$

Gezien de aanname dat $u(0) = u(1) = 0$ volgt dat $w = u - v$ aan $w'' = 0$, $w(0) = w(1) = 1$ voldoet, waaruit volgt $w \equiv 0$, dus $u = v$ op $[0, 1]$.

(c) Met partiële integratie is (1) equivalent aan

$$\begin{aligned} v(x) &= (x-1) \int_0^x \xi u''(\xi)d\xi + x \int_x^1 (\xi-1)u''(\xi)d\xi \\ &= -(x-1) \int_0^x \xi' u'(\xi)d\xi + (x-1)[\xi u']_{\xi=0}^{\xi=x} - x \int_x^1 (\xi-1)' u'(\xi)d\xi + x[(\xi-1)u']_{\xi=x}^{\xi=1} \\ &= -(x-1)(u(x) - u(0)) + (x-1)xu'(x) - x(u(1) - u(x)) - x(x-1)u'(x) \\ &= -(x-1)u(x) + xu(x) \\ &= u(x). \end{aligned}$$

Oplossing 3 (a) We bekijken de homogene vergelijking $y'' - 2y' + 2y = 0$. De karakteristieke veelterm $k^2 - 2k + 2$ heeft de nulpunten $1 \pm i$. Een basis van oplossingen is dus

$$y_1(x) = e^x \cos x, \quad y_2(x) = e^x \sin x.$$

De enige oplossing $y(x) = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$ die aan $y(0) = y(1) = 0$ voldoet heeft $C_1 = C_2 = 0$ en is dus de nuloplossing. Hieruit volgt de eenduidigheid van het inhomogene randwaardeprobleem.

(b) Met $y(x) = A(x)z(x)$ is

$$Ly = A''z + 2A'z' + Az'' - 2A'z - 2Az' + 2Az = Az'' + (2A' - 2A)z' + (A'' - 2A' + 2A)z.$$

De term met z' verdwindt als $A' = A$, dus $A(x) = e^x$. Daarmee geldt

$$Ly(x) = e^x(z''(x) + z(x)),$$

(c) Het oorspronkelijke randwaardeprobleem is equivalent aan

$$z''(x) + z(x) = g(x), \quad z(0) = z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (6)$$

waar $g(x) = e^{-x}f(x)$.

(d) De Greensche functie voor (6) is

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\cos x \sin \xi & \text{als } \xi \leq x \\ -\sin x \cos \xi & \text{als } x \leq \xi \end{cases}$$

(Zie Duistermaat/Eckhuis.)

(e) De oplossing van het oorspronkelijke probleem is nu

$$y(x) = e^x \int_0^{\pi/2} G(x, \xi) e^{-\xi} f(\xi) d\xi.$$