Tentamen Gewone Differentiaal Vergelijkingen II

22.02.2007

Jullie mogen een willekeurige van de vier opgaven als bonusopgave bekijken. (Dus drie opgaven volledig en goed gedaan is al een 10.)

Opgave 1 *Bekijk de lineaire differentiaal vergelijking*

$$y''' - y = 0.$$

(a) *Geef de algemene oplossing aan. (Expliciet, dus geen machtreeks!)*

(b) *Bepaal de (unieke) oplossing die voldoet aan*

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = y''(0) = 0.$$

(c) *Los de differentiaalvergelijking door een machtreeks rond $x = 0$ op. Eerst algemeen en dan met de beginvoorwarden van (b).*

(d) *Gebruik dit om*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!}$$

te berekenen. (Geef een expliciete uitdrukking aan, maar je hoeft deze niet numeriek uit te rekenen.)

Opgave 2 *Bepaal de Greense functie voor het randwaardeprobleem*

$$u'' + \frac{1}{4x^2}u = f, \quad u(1) = u(2) = 0.$$

Hint: Substitueer $x = e^t$.

Zie vervolg op achterkant!!

Opgave 3 *(a) Bepaal de eigenwaarden* $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$ *en eigenfuncties voor het eigenwaarde probleem*

$$u'' + \lambda u = 0 \text{ op } [0,1], \ u(0) = u'(0), \ u(1) = 0.$$

(b) Laat zien dat

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi + \beta_n\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \text{ waar } \beta_n \searrow 0.$$

Opgave 4 *Bekijk de differentiaalvergelijking van Legendre ($\alpha \in \mathbb{C}$ vast):*

$$(z^2 - 1)u''(z) + 2zu'(z) - \alpha(\alpha + 1)u(z) = 0.$$

We zoeken een ontwikkeling voor de oplossing rond $z = \infty$ van de vorm

$$u_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{\lambda - k}. \tag{1}$$

(a) Bepaal een inductivee conditie op de coëfficienten u_k.

(b) Laat zien dat $\lambda \in \{\alpha, -\alpha - 1\}$.

(c) Bekijk het geval $\lambda = \alpha$. Geef een expliciete formule voor u_k. Gebruik hiervoor

$$\binom{x}{n} := \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}, \qquad \binom{x}{0} := 1,$$

waar $x \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Welke conditie is er op α?

(d) Bewijs dat de reeks (1) met $\lambda = \alpha$ voor $|z| > 1$ convergeert.

(e) Laat zien dat u_α een veelterm is als $\alpha \in \mathbb{N}$. (De Legendre polynomen.)

(f) Als u_α de boven bepaalde oplossing is, laat zien dat ook $u_{-\alpha-1}$ een oplossing is. Wat is nu de conditie op α?

Oplossingen

Oplossing 1 (a) Inzetten van $y(x) = e^{kx}$ levert $k^3 = 1$, en dus

$$k_1 = 1, \quad k_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad k_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \overline{k_2}.$$

Dus:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{k_2 x} + c_3 e^{k_3 x}.$$

(b) De beginvoorwarden leveren de condities

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 1, \\ c_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3 &= 0, \\ c_1 + c_2 (k_2)^2 + c_3 (k_3)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Merk op dat $(k_2)^2 = k_3 = \overline{k_2}$ en $(k_3)^2 = k_2$. Door optellen en van elkaar aftrekken van de tweede en derde vergelijking krijgen we

$$\begin{aligned} 2c_1 + c_2(k_2 + \overline{k_2}) + c_3(\overline{k_2} + k_2) &= 0, \\ c_2(k_2 - \overline{k_2}) + c_3(\overline{k_2} - k_2) &= 0. \end{aligned}$$

De tweede van deze levert $c_2 = c_3$, en met $k_2 + \overline{k_2} = -1$ volgt uit de eerste dat $2c_1 - c_2 - c_3 = 2c_1 - 2c_2 = 0$, dus $c_1 = c_2 = c_3$ en daarom $c_1 = c_2 = c_3 = 1/3$. Dus

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{3}\left(e^x + e^{k_2 x} + e^{k_3 x}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)\right). \end{aligned} \tag{2}$$

(c) Met

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

geldt

$$y'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)(n+1) a_{n+3} x^n.$$

Inzetten van de reeksen voor y en y''' in $y''' = y$ en vergelijking van coefficienten geeft

$$(n+3)(n+2)(n+1) a_{n+3} = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

We kunnen dus a_0, a_1, a_2 willekeurig kiezen en verder geldt

$$a_{3n+k} = \frac{k!}{(3n)!} a_k \quad \forall n \geq 1,\ k \in \{0, 1, 2\},$$

ofwel

$$a_{3n} = \frac{a_0}{(3n)!}, \quad a_{3n+1} = \frac{a_1}{(3n)!}, \quad a_{3n+2} = \frac{2a_2}{(3n)!} \quad \forall n \geq 1.$$

Dus

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!} + a_2 \left(x^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!} \right). \tag{3}$$

Natuurlijk geldt $y(0) = a_0,\ y'(0) = a_1,\ y''(0) = 2a_2$.

De beginvoorwaarden van (b) leiden dus op

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

(d) Met $x = 1$ krijgen we

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!} = y(1),$$

waar $y(x)$ de oplossing van $y''' = y$ is die aan $y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0$ voldoet. Door in (2) $x = 1$ te zetten krijgen we

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{1}{3} \left(1 + 2e^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right).$$

(Dit is ≈ 1.1680583, wat op acht cijfers na de komma gelijk is aan $1 + 1/3! + 1/6! + 1/9!$).

Oplossing 2 We zoeken eerst de algemene oplossing van

$$u''(x) + \frac{1}{4x^2} u(x) = 0.$$

Met de substitutie $x = e^t$, dus $u(x) = v(t)$, hebben we

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = v'(t) \frac{1}{x},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{x^2} v'(t) + \frac{1}{x^2} v''(t),$$

dus

$$\frac{v''}{e^{2t}} - \frac{v'}{e^{2t}} + \frac{v}{4e^{2t}} = 0,$$

of gewoon $v'' - v' + v/4 = 0$. De charakteristieke veelterm $k^2 - k + 1/4$ heeft de dubbele nulpunt $k = 1/2$, de oplossingen zijn dus

$$v(t) = e^{t/2}(c_1 + c_2 t),$$

$$u(x) = \sqrt{x}(c_1 + c_2 \ln x).$$

Hiermee is

$$u(1) = c_1, \qquad u(2) = \sqrt{2}(c_1 + c_2 \ln 2).$$

De homogene randvoorwarden $u(1) = u(2) = 0$ leiden dus op $c_1 = c_2 = 0$, er geldt dus eenduidigheid voor het inhomogene randwaardeprobleem. De oplossingen

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \ln x \cdot \sqrt{x} \\ u_2(x) &= (\ln x - \ln 2)\sqrt{x} \end{aligned}$$

voldoen aan $u_1(1) = u_2(2) = 0$. De Wronski determinante $u_1u_2' - u_1'u_2$ is gelijk aan $\ln 2$, en dus is de Greensche functie

$$\begin{aligned} G(x,\xi) &= \frac{1}{\ln 2}\cdot\begin{cases} u_1(\xi)u_2(x) & \text{als } 1\le\xi\le x\le 2 \\ u_1(x)u_2(\xi) & \text{als } 1\le x\le\xi\le 2\end{cases} \\ &= \frac{\sqrt{x\xi}}{\ln 2}\cdot\begin{cases} (\ln x - \ln 2)\ln\xi & \text{als } 1\le\xi\le x\le 2 \\ (\ln\xi - \ln 2)\ln x & \text{als } 1\le x\le\xi\le 2\end{cases}\end{aligned}$$

Oplossing 3 (a) De algemene oplossing van $u'' + \lambda u = 0$ (waar $\lambda > 0$) is

$$u(x) = c_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Nu zijn $u(0) = c_1$ en $u'(0) = \sqrt{\lambda}c_2$, dus moet $c_1 = \sqrt{c},\ c_2 = c$. Dus

$$u(x) = c(\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x) + \sin(\sqrt{\lambda}x)).$$

De voorwaarde $u(1) = 0$ leidt op

$$\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}) + \sin(\sqrt{\lambda}) = 0,$$

ofwel

$$\sqrt{\lambda} = -\tan\sqrt{\lambda}.$$

(b) We zoeken de oplossingen $x_1, x_2, \dots$ van $x = -\tan x$. Op $(0,\pi/2)$ geldt $\tan x > 0$ en bestaat dus geen oplossing. Een tekening van $f_1(x) = x, f_2(x) = -\tan x$ maakt duijdelijk dat $x = -\tan x$ precies een oplossing x_n in elk interval $(\pi/2 + n\pi, 3\pi/2 + n\pi),\ n \in \mathbb{N}_0$ heeft, dus

$$x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi + \beta_n \quad \text{met} \quad \beta_n \in (0,\pi).$$

Verder geldt dat x_n voor $n \to \infty$ steeds dichter bij de linke rand van het interval $(\pi/2 + n\pi, 3\pi/2 + n\pi)$ ligd, dus $\beta_n \searrow 0$. De beweringen over $\lambda_n = x_n^2$ volgenen meteen.

Oplossing 4 (Alles resultaten)

(a) Uit (1) volgt

$$\begin{aligned} u_\lambda'(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\lambda-k)z^{\lambda-k-1}, \\ u_\lambda''(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\lambda-k)(\lambda-k-1)z^{\lambda-k-2},\end{aligned}$$

en dus

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k\left((\lambda-k)(\lambda-k-1) + 2(\lambda-k) - \alpha(\alpha+1)\right)z^{\lambda-k} - \sum_{k=2}^{\infty} u_{k-2}((\lambda-k)(\lambda-k-1))z^{\lambda-k} = 0.$$

Door vergelijking van coefficienten krijgen we voor $k = 0$ en $k = 1$

$$u_0(\lambda(\lambda+1) - \alpha(\alpha+1)) = 0, \tag{4}$$

$$u_1((\lambda-1)\lambda - \alpha(\alpha+1)) = 0,$$

en voor $\lambda \in \{2, 3, \dots\}$:

$$u_k((\lambda-k)(\lambda-k+1) - \alpha(\alpha+1)) = u_{k-2}(\lambda-k+2)(\lambda-k+1). \tag{5}$$

(b) We kunnen u_0 en u_1 onafhankelijk kiezen. We kijken alleen naar de oplossing met $u_0 = 1, u_1 = 0$. (Een oplossing met $u_0 = 0, u_1 = 1$ kunnen we in een oplossing met $u_0 = 1$ transformeren als we λ door $\lambda+1$ vervangen.) Dan volgt uit (4) de conditie $\lambda \in \{\alpha, -\alpha-1\}$.

(c) Met $\lambda = \alpha$ wordt (5)

$$\begin{aligned} u_k &= u_{k-2}\frac{(\alpha-k+2)(\alpha-k+1)}{((\alpha-k)(\alpha-k+1)-\alpha(\alpha+1))} \\ &= u_{k-2}\frac{(\alpha-k+2)(\alpha-k+1)}{-k(2\alpha+1-k)}. \end{aligned}$$

Met $u_0 = 1, u_1 = 0$ krijgen we

$$u(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^{\alpha-2i}\,\frac{\alpha(\alpha-2)\cdots(\alpha-2i+2)(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2i+1)}{(-2i)(-2i-2)\cdots(-2)(2\alpha-1)(2\alpha-3)\cdots(2\alpha-2i+1)}$$

We zijn dat $2\alpha \notin \{1, 3, \ldots\}$ moet gelden.