

Tentamen Gewone Differentiaal Vergelijkingen

October 25, 2006

Opgave 1 (a) *Los de differentiaal vergelijking*

$$(xy^2 - y^3)dx + (1 - xy^2)dy = 0$$

met behulp van een integrerende factor ϕ op. (Deze kan zo gekozen worden dat hij alleen van y afhangt, dus $\phi = \phi(y)$.)

(b) *Teken een faseplaatje met sommige oplossingskrommen.*

(c) *Is er een oplossing door het nulpunt? Zo ja, geef deze aan.*

Opgave 2 *Bekijk de lineaire differentiaal vergelijking*

$$x^2 y'' - 3xy' + 7y = 0.$$

(a) *Als $y(x)$ een oplossing is, laat zien dat ook $y(-x)$ een oplossing is.*

(b) *Dankzij (a) kunnen we ons op $x > 0$ beperken. Gebruik de substitutie*

$$x = e^t$$

om een basis voor de ruimte van reële oplossingen aan te geven.

Opgave 3 *Geef reële fundamentele stelsels van oplossingen aan voor*

(a)

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 6y \\ y' &= -2x - 3y \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x' &= -2x + y \\ y' &= -9x + 4y \end{aligned}$$

Zie vervolg op achterkant!!

Opgave 4 *De lineaire differentiaal vergelijking*

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (\beta - x) \frac{dy}{dx} - \alpha y = 0, \quad (1)$$

waar α en β reële (of complexe) parameters zijn, heet, afhankelijk van de auteur, de ‘confluent hypergeometrische’ vergelijking of de vergelijking van Kummer of van Laplace. Hoe dan ook, we zijn in machtreeksoplossingen

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

rond het punt $x = 0$ geïnteresseerd die aan $y(0) = 1$ voldoen.

Onder welke voorwaarden aan α, β bestaat er

- een unieke oplossing $a_1, a_2, a_3, \dots$?
- een niet unieke oplossing $a_1, a_2, a_3, \dots$?
- geen oplossing $a_1, a_2, a_3, \dots$?

Bekijk nu het geval waar een unieke oplossing door een machtreeks bestaat:

(a) Gebruik de definitie

$$(z)_0 = 1, \quad (z)_k := z(z+1) \cdots (z+k-1), \quad z \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}$$

om een compacte uitdrukking voor de oplossing $y(x; \alpha, \beta)$ aan te geven.

(b) Bepaal de convergentiestraal.

(c) Voor welke combinaties van de parameters α, β heeft (1) een veelterm als oplossing?

Opgave 5 *Toon aan dat het randwaardeprobleem*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \pi^2 y = f(x), \quad y(0) = y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

voor alle $f \in C([0, 1/2])$ een unieke oplossing heeft en geef deze aan, zo expliciet mogelijk!

Oplossingen

Oplossing 1 (a) We zoeken een functie $y \mapsto \phi(y)$ zodat

$$\phi(y)(xy^2 - y^3)dx + \phi(y)(1 - xy^2)dy = 0 \quad (2)$$

exact is. Dit betekent:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\phi(y)(xy^2 - y^3)) = \frac{\partial}{\partial x}(\phi(y)(1 - xy^2)).$$

We krijgen dus de vergelijking

$$\phi'(y)(xy^2 - y^3) + \phi(y)(2xy - 3y^2) = -\phi(y)y^2.$$

Dit is equivalent aan

$$\phi'(y)(xy^2 - y^3) = \phi(y)(2y^2 - 2xy).$$

Dus

$$\phi'(y)y^2(x - y) = -\phi(y)2y(x - y)$$

en

$$(\ln \phi(y))' = \frac{\phi'(y)}{\phi(y)} = \frac{-2}{y}.$$

Dus

$$\ln \phi(y) = -2 \ln(y) + C.$$

Met $C = 0$ wordt dit

$$\phi(y) = e^{-2 \ln(y)} = 1/y^2.$$

Daarmee wordt (2):

$$(x - y)dx + \left(\frac{1}{y^2} - x\right)dy = 0,$$

en we zoeken $E(x, y)$ zodat

$$\frac{\partial E}{\partial x} = x - y, \quad \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{1}{y^2} - x.$$

De eerste vergelijking wordt opgelost door

$$E(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy + F(y).$$

Als we dit in de tweede vergelijking inzetten krijgen we

$$\frac{\partial E}{\partial y} = -x + F'(y) \stackrel{!}{=} \frac{1}{y^2} - x,$$

of $F'(y) = 1/y^2$, en dus $F(y) = -1/y$. Dus

$$E(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy - \frac{1}{y}.$$

De implicite oplossingen zijn dus door

$$\frac{x^2}{2} - xy - \frac{1}{y} = C$$

gegeven.

(b) ...

(c) Voor $x = y = 0$ wordt de vergelijking $0 \cdot dx + 1 \cdot dy = 0$, dus $y'(0) = 0$. We proberen dus $y(x) = 0$, een door inzetten zien we dat dit aan de vergelijking voldoet. (Deze oplossing is de limiet $C \rightarrow \pm\infty$ van de oplossingen in (a).)

Oplossing 2 (a) Met $y_2(x) = y(-x)$ hebben we $y_2'(x) = -y'(-x)$ en $y_2''(x) = y''(-x)$ en dus

$$\begin{aligned} x^2 y_2''(x) - 3x y_2'(x) + 7y_2(x) &= x^2 y''(-x) - 3(-x)(-y'(-x)) + 7y(-x) \\ &= x^2 y''(-x) - 3x y'(-x) + 7y(-x) = 0. \end{aligned}$$

Dus y_2 is een oplossing.

(b) We schrijven $z(t) = y(e^t)$ en $\dot{z} = \frac{dz(t)}{dt}$. Daarmee:

$$\dot{z}(t) = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = y'(e^t) e^t = xy'(x),$$

$$\ddot{z}(t) = \frac{d}{dt} (y'(e^t) e^t) = y'(e^t) e^t + y''(e^t) e^{2t} = xy'(x) + x^2 y''(x).$$

Nu

$$x^2 y'' - 3xy' + 7y - \ddot{z} = -4xy' + 7y = -4\dot{z} + 7z,$$

dus

$$x^2 y'' - 3xy' + 7y = \ddot{z} - 4\dot{z} + 7z.$$

De vergelijking $\ddot{z} - 4\dot{z} + 7z = 0$ heeft de karakteristieke veelterm $\lambda^2 - 4\lambda + 7 = 0$ met de oplossingen

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-7} = 2 \pm \sqrt{3}i.$$

De reële oplossingen zijn dus

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{2t} \sin \sqrt{3}t, \\ z_2(t) &= e^{2t} \cos \sqrt{3}t. \end{aligned}$$

Met de substitutie $t = \ln x$ krijgen we de oplossingen

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^2 \sin(\sqrt{3} \ln x), \\ y_2(x) &= x^2 \cos(\sqrt{3} \ln x) \end{aligned}$$

van de originele vergelijking voor $x > 0$.

Oplossing 3 (a) De karakteristieke veelterm voor A is

$$P(\lambda) = (3 - \lambda)(-3 - \lambda) + 12 = \lambda^2 + 3.$$

De nulpunten hiervan zijn $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}i$. Met $\lambda = \sqrt{3}i$ hebben we

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3 - \sqrt{3}i & 6 \\ -2 & -3 - \sqrt{3}i \end{pmatrix},$$

Deze matrix heeft rang een, dus $(A - \lambda E)x = 0$ is equivalent aan

$$(3 - \sqrt{3}i)x_1 + 6x_2 = 0$$

en heeft $x = (-6, 3 - \sqrt{3}i)^T$ als oplossing, dus als eigenvector voor de eigenwaarde $\lambda = \sqrt{3}i$. (De complex geconjugeerde eigenwaarde $\lambda = -\sqrt{3}i$ heeft $y = (-6, 3 + \sqrt{3}i)^T$ als eigenvector.) Een basis van reële oplossingen van $y'(x) = Ay(x)$ is dus door de reële en imaginaire gedeeltes van

$$e^{\sqrt{3}ix} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 - \sqrt{3}i \end{pmatrix}$$

gegeven, dus door

$$\begin{pmatrix} -6 \cos \sqrt{3}x \\ 3 \cos \sqrt{3}x + \sqrt{3} \sin \sqrt{3}x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -6 \sin \sqrt{3}x \\ 3 \sin \sqrt{3}x - \sqrt{3} \cos \sqrt{3}x \end{pmatrix}.$$

(b) De karakteristieke veelterm voor A is

$$P(\lambda) = (-2 - \lambda)(4 - \lambda) + 9 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

We hebben dus een dubbele nulpunt $\lambda = 1$. Verder is

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix},$$

de eigenruimte is dus een-dimensionaal met basis $v = (1, 3)^T$. Om de Jordan normaalvorm te vinden, hebben we nu nog een vector w nodig zodat $Aw = \lambda w + v$, dus $(A - \lambda E)w = v$. Dit levert de vergelijking

$$-3w_1 + w_2 = 1$$

op, waarvan $w = (0, 1)^T$ een mogelijke oplossing is. Een mogelijke basis van de oplossingsruimte van $y' = Ay$ is dus:

$$e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad e^x \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right].$$

Oplossing 4 Door

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

in de differentiaal vergelijking in te zetten krijgen we

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k k(k-1) x^{k-1} + \beta \sum_{k=0}^{\infty} a_k k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k k x^k - \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0,$$

dus

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k k(k-1+\beta) x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+\alpha) x^k = 0.$$

Dit is equivalent aan

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)(k+\beta)a_{k+1} - (k+\alpha)a_k] x^k = 0.$$

Opdat deze machtreeks identiek nul is moet

$$(k+1)(k+\beta)a_{k+1} - (k+\alpha)a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+ \quad (3)$$

gelden. Stel dat $\beta \notin \mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, \dots\}$. Dan worden de factoren $(k+1)(k+\beta)$ nooit nul, en (3) is equivalent aan

$$a_{k+1} = a_k \frac{k+\alpha}{(k+1)(k+\beta)} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+,$$

en met inductie en $a_0 = 1$ krijgen we een unieke oplossing

$$a_k = a_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{i+\alpha}{(i+1)(i+\beta)} = \frac{(\alpha)_k}{k!(\beta)_k} \quad \forall k \geq 1.$$

Formeel is de oplossing van (1) door een machtreeks rond $x = 0$ met $a_0 = 1$ dus gegeven door

$$y(x; \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{(\alpha)_k}{(\beta)_k}.$$

Verder geldt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+\alpha}{(k+1)(k+\beta)} = 0,$$

en de convergentiestraal van de machtreeks is ∞ . Deze functie noemen we $y(x; \alpha, \beta)$.

De machtreeks breekt af, we krijgen dus een veelterm als oplossing, precies als $\alpha \in \mathbb{Z}_-$. Concreet: Als $\alpha = -n$ met $n \in \mathbb{Z}_+$ dan is $(\alpha)_{n+1} = (-n)(-n+1) \cdots (-n+(n+1)-1) = 0$, maar $(\alpha)_m \neq 0$ voor $m \leq n$. Dus $a_m \neq 0$ voor $m < n$, maar $a_n = 0$. We concluderen dat de functie $x \mapsto y(x; -n, \beta)$, waar $\beta \notin \mathbb{Z}_-$, $\alpha = -n \in \mathbb{Z}_-$, een veelterm van orde n is.

We zien nu dat (3) ook in het geval $\beta \in \mathbb{Z}_-$ een unieke oplossing heeft mits $\alpha \in \mathbb{Z}_-$ en $(-\alpha) < (-\beta)$. In dit geval breekt de rij $a_1, a_2, \dots$ na $n = -\alpha$ af, voordat we bij $n = -\beta$ een probleem met divisie door nul krijgen. Als $\alpha = \beta \in \mathbb{Z}_-$ heeft (3) voor $k = -\alpha$ de vorm $0 = 0$ en a_{k+1} is niet eenduidig bepaald en kan willekeurig worden gekozen. (Dan is a_l , $l > k+1$ weer eenduidig bepaald. Alle oplossingen van (1) zijn dus machtreeksoplossingen en worden door a_0 en a_{k+1} bepaald.) In het geval $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_-$ met $(-\beta) < (-\alpha)$ bestaat helemaal geen oplossing van (3) met $a_0 = 1$. We vatten de resultaten in een tabel samen:

$\beta \notin \mathbb{Z}_-, \alpha \notin \mathbb{Z}_-$	niet afbrekende machtreeks van convergentiestraal ∞
$\beta \notin \mathbb{Z}_-, \alpha \in \mathbb{Z}_-$	veelterm van orde $-\alpha$
$\beta, \alpha \in \mathbb{Z}_-, -\alpha < -\beta$	veelterm van orde $-\alpha$
$\beta, \alpha \in \mathbb{Z}_-, \alpha = \beta$	oplossing door machtreeks bestaat, maar is niet eenduidig
$\beta, \alpha \in \mathbb{Z}_-, -\beta < -\alpha$	geen oplossing $\neq 0$ door machtreeks

Oplossing 5 Ten eerste merken we op dat de homogene vergelijking $y'' + \pi^2 y = 0$ de oplossingen $\sin(\pi x), \cos(\pi x)$ heeft. De oplossing met $y(0) = 0$ is dus $C \sin(\pi x)$, en gezien $\sin(\pi/2) = 1$ is de enige oplossing met randvoorwaarden $y(0) = y(1/2) = 0$ gegeven door $y = 0$. Volgens het alternatief van Fredholm bestaat er dus een eenduidige oplossing van het inhomogene randwaarde probleem. Ze wordt deze gegeven door

$$y(x) = \int_0^{1/2} G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

waar

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{u(x)v(\xi)}{w(\xi)p(\xi)} & \text{als } x \leq \xi, \\ \frac{u(\xi)v(x)}{w(\xi)p(\xi)} & \text{als } x \geq \xi \end{cases}$$

Hier zijn u, v oplossingen (ongelijk nul) van $y'' + \pi^2 y = 0$, die aan $u(0) = v(1/2) = 0$ voldoen, $w(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x)$ en $p(x) = 1$. We kiezen $u(x) = \sin(\pi x)$ en $v(x) = \cos(\pi x)$. Daarmee is $w(x) = \sin(\pi x)(-\pi \sin(\pi x)) - \cos(\pi x)\pi \cos(\pi x) = -\pi$. Dus:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x f(\xi) \frac{\sin(\pi \xi) \cos(\pi x)}{-\pi} d\xi + \int_x^{1/2} f(\xi) \frac{\sin(\pi x) \cos(\pi \xi)}{-\pi} d\xi \\ &= -\frac{\cos(\pi x)}{\pi} \int_0^x f(\xi) \sin(\pi \xi) d\xi - \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \int_x^{1/2} f(\xi) \cos(\pi \xi) d\xi. \end{aligned}$$