De eerste opgave is alleen om op te warmen:

**Opgave 1** *Gebruik de resultaten van het hoorcollege om het Riemann-Lebesgue Lemma te bewijzen:*

$$f \in \mathcal{R}[0, 2\pi] \quad \Rightarrow \quad \lim_{|n| \to \infty} c_n(f) = 0.$$

**Opgave 2** *(Parallelogramvergelijking en polarisatie)*

*(a) Zij $(V, (\cdot, \cdot))$ een pre-Hilbert ruimte. Bewijs de "parallelogram identiteit"*

$$\forall x, y \in V: \; \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{1}$$

*(b) Zij $(V, (\cdot, \cdot))$ een pre-Hilbert ruimte. Bewijs de "polarisatie identiteit"*

$$\forall x, y \in V: \; (x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - \|x - y\|^2 - i\|x - iy\|^2\right). \tag{2}$$

*(c) Zij $(V, \|\cdot\|)$ en genormeerde ruimte over $\mathbb{C}$ waar (1) geldt. Defineer $(x, y)$ door (2). Bewijs dat $(V, (\cdot, \cdot))$ en pre-Hilbert ruimte is.*

*(d) Hoe moet je (c) veranderen als $V$ een vectorruimte over $\mathbb{R}$ is?*

**Opgave 3** *Bewijs dat de rij $\{f_n, \; n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathcal{R}[0, 2\pi]$ gedefineerd door*

$$f_n(\theta) = \begin{cases} 0 & 0 \le \theta \le 1/n \\ \ln(1/\theta) & 1/n < \theta \le 2\pi \end{cases}$$

*een Cauchy rij is t.o.v. $\|\cdot\|_2$. (In het hoorcollege hebben we gezien hoe hieruit volgd dat $\mathcal{R}[0, 2\pi]$ niet volledig is.)*

**Hint:** *Bewijs en gebruik de identiteit $\frac{d}{d\theta}\left(\theta(\ln\theta)^2 - 2\theta\ln\theta + 2\theta\right) = (\ln\theta)^2$.*

**Opgave 4** *(a) Bewijs dat $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ gedefineerd door*

$$c_n = \begin{cases} 1/n & n \ge 1 \\ 0 & n \le 0 \end{cases}$$

*in $\ell^2(\mathbb{Z})$ is.*

*(b) Bewijs dat er geen $f \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$ is die de $c_n$'s als Fourier coëfficienten heeft.*

**Hint:** *Gebruik de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n}$ die we eerder (Zorich, hoofdstuk 16) tegengekomen zijn.*