We herhalen twee bekende definities:

Definitie 1 *Een geparametriseerde kromme K, dus een continue functie $f : I \to \mathbb{R}^d$, heet* **rectificeerbaar** *als*

$$\sup_P \sum_{i=1}^{n} \|f(x_i) - f(x_{i-1})\|_2 \ < \infty,$$

waar het supremum over alle partities van I gaat. Als het supremum eindig is noemen we het de **lengte** *$L(K)$ van K.*

Definitie 2 *Een functie $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ is* **Lipschitz met exponent** *$\alpha > 0$ als er een $C > 0$ is zodanig dat*

$$|f(x) - f(y)| \ \leq \ C|x-y|^\alpha.$$

We schrijven: $f \in \mathrm{Lip}^\alpha[a,b]$.

Opgave 1 Begrensde variatie

(a) Zij $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ een Lipschitz functie met $\alpha = 1$. Bewijs dat f begrensde variatie heeft.

(b) Voor de continue functie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gedefineerd door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x\sin(1/x) & x > 0 \end{cases},$$

bewijs dat $\mathrm{Var}_{[0,1]}(f) = \infty$.

(c) Bewijs dat $c_n(f) = O(|n|^{-\alpha})$ als $f \in \mathrm{Lip}^\alpha[a,b]$. Hint: Gebruik vergelijking (3.1) van het diktatje.

Opgave 2 Begrensde variatie en Rectificeerbare krommen

(a) Bewijs dat de kromme K, gedefineerd door $f \in C(I, \mathbb{R}^d)$, rectificeerbaar is d.e.s.d.a. alle functies $f_i : I \to \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, d$, begrensde variatie hebben. Hint: Bewijs en gebruik dat $|x_i| \leq \|x\|_2 \leq \sum_i |x_i|$ voor alle $x = (x_1, \ldots, x_d)$.

(b) De kromme K zij door $f \in C^1([a,b], \mathbb{R}^d)$ gedefineerd. Bewijs dat K rectificeerbaar is en

$$L(K) = \int_a^b \|f'(x)\|_2.$$

Opmerking: Als $d = 1$, geldt $L(K) = \mathrm{Var}_{[a,b]}(f)$.

Opgave 3 Laat zien dat de Laplace operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ in het vlak $\mathbb{R}^2$ in poolcoordinaten (r, θ) de vorm

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

heeft.