Opgave 1 Berekening van $\zeta(2n)$, $n \in \mathbb{N}$. We gebruiken de definities

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \qquad \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

en daarom de versie

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m)$$

van de Poisson som formule.

(a) Bewijs dat

$$f_t(x) = e^{-2\pi t|x|} \qquad \Rightarrow \qquad \widehat{f_t}(\xi) = \frac{t}{\pi(\xi^2 + t^2)}.$$

(Hint: Schrijf $\int_{-\infty}^{\infty} = \int_0^{\infty} + \int_{-\infty}^0$ en integreer oneigenlijk.)

(b) Pas de Poisson som formule op f_t toe.

(c) Bewijs

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi t|n|} = \frac{2}{1 - e^{-2\pi t}} - 1 \qquad (\forall t > 0).$$

(d) Bewijs

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{t}{t^2 + n^2} = \frac{1}{\pi t} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \zeta(2m) t^{2m-1} \qquad (\forall t \neq 0).$$

(e) De getallen $B_2, B_4, \ldots$ van Bernoulli zijn gedefineerd door

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} z^{2m}.$$

Gebruik dit om te bewijzen dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} = \zeta(2m) = (-1)^{m+1} \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m}.$$

(f) Bereken B_2 en concluder $\zeta(2) = \pi^2/6$.