Opgave 1

Laat zien:

(a) Een vereniging van aftelbaar veel aftelbare verzamelingen is aftelbaar.

(b) Als $n \in \mathbb{N}$ en $X_1, \ldots, X_n$ aftelbaar zijn dan is $X_1 \times X_2 \cdots X_n$ aftelbaar.

(c) Zij $\{X_i, i \in I\}$ een familie van verzamelingen, waar geen X_i leeg is. Bewijs: Als

$$\{i \in I \mid X_i \text{ heeft meer dan een element}\} \subset I$$

oneindig is, dan is

$$\prod_{i \in I} X_i$$

niet aftelbaar.

Opgave 2

Definitie: Een 'Dedekind cut' is een verzameling $X \subset \mathbb{Q}$ zodat

1. $X \neq \emptyset,\ X \neq \mathbb{Q}$.
2. $x \in X,\ y \notin X \Rightarrow x < y$.
3. $x \in X \Rightarrow \exists y \in X, y > x$. (Of: er is geen $r \in \mathbb{Q}$ zodat $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq r\}$).

Zij $R \subset P(\mathbb{Q})$ de verzameling van alle Dedekind cuts.

We defineren een afbeelding $f : \mathbb{Q} \to R$ (ga na dat $(f(x) \in R$!) door

$$f(x) = \{y \in \mathbb{Q} \mid y < x\}$$

en identifiëren $x \in \mathbb{Q}$ met $f(x) \in R$. In 't bijzonder: $0 \equiv \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\} \in R$.

Voor $X, Y \in R$ defineren we een ordening $\leq$ door $X \leq Y :\Leftrightarrow X \subset Y$.

Voor $X, Y \in R$ defineren we $X + Y = \{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\}$ en voor $X, Y \in R, 0 \leq X, 0 \leq Y$, defineren we $X \cdot Y = \{xy \mid x \in X,\ y \in Y\}$.

Voor $X \in R$ defineer $-X = \{-y \mid y \in \mathbb{Q} \backslash X \ \wedge\ \exists z \in \mathbb{Q} \backslash X : z < y\}$, en hiermee, voor $X, Y \in R$,

$$X \cdot Y = \begin{cases} -(X \cdot (-Y)) & \text{als } \ Y < 0, 0 \leq X \\ -((-X) \cdot Y) & \text{als } \ X < 0, 0 \leq Y \\ (-X) \cdot (-Y)) & \text{als } \ X < 0, Y < 0. \end{cases}$$

Voor $X > 0$ defineer $X^{-1} = \{y \in \mathbb{Q} \mid 0 < x \in X \ \Rightarrow\ xy < 1\}$ en voor $X < 0 : X^{-1} = -((-X)^{-1})$.

Ga na dat R een voledig geordend lichaam is (bijvoorbeeld: $X + Y, X \cdot Y, -X, X^{-1}$ zoals boven gedefineerd zijn in R !) en dat $f : \mathbb{Q} \to R$ is een homomorfisme van geordende lichamen is.