Tentamen Analyse I. Voorjaar 2006

Toelichting:

- Je mag Zorich I gebruiken, maar geen ander hulpmiddelen (zoals andere boeken, aantekeningen, rekenmachine etc.)!
- Als je bekende stellingen gebruikt willen we voledige referenties zien (bijv.: Zorich blz 123, Stelling 5), waar je ook duidelijk maakt dat aan de voorwarden voldaan is.
- In het totaal zijn er **50 punten** te behalen. Evaluatieschema (voorlopig!):

24 t/m 28	29 t/m 33	34 t/m 38	39 t/m 43	44 t/m 50
6	7	8	9	10

Opgave 1 (10 punten) *Gegeven zij en rij $\{a_n\}$ van reële of complexe getallen. Bewijs het volgende:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^n a_i}{n+1} = 0.$$

Opgave 2 (7 punten) *Gegeven een (reële of complexe) rij $\{s_n\}$, defineren we*

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

(a) *(2 punten) Bewijs: Als $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ (eindig), dan $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s$.*

(b) *(1 punt) Geef een rij $\{s_n\}$ die geen limiet heeft maar waarvoor $\lim_n \sigma_n = 0$.*

(c) *(1 punt) Kan het gebeuren dat $s_n > 0$ voor alle n, met $\limsup s_n = +\infty$ en $\lim \sigma_n = 0$? Zo ja, geef een voorbeeld.*

(d) *(2 punten) Schrijf $b_n = s_n - s_{n-1}$ voor $n \geq 1$ en bewijs*

$$s_n - \sigma_n = \frac{\sum_{k=1}^n kb_k}{n+1}.$$

(e) *(1 punt) Concludeer: Als $\lim \sigma_n = \sigma$ en $\lim_n(nb_n) = 0$ dan $\lim s_n = \sigma$.*

Hint: Voor (a) en (e) gebruik de bewering van Opgave 1. Dit mag ook als je die niet gemaakt hebt!!!

Opgave 3 (5 punten) *Maak de volgende uitspraak precies en geef een bewijs: Als f en g uniform continue functies zijn, dan is de compositie $f \circ g$ uniform continu.*

Zie vervolg op achterkant!!

Opgave 4 (8 punten) *Bepaal de convergentiestralen van de volgende machtreeksen:*

$$(a): \sum_n n^3 z^n, \quad (b): \sum_n \frac{2^n}{n!} z^n, \quad (c): \sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n^2} z^n, \quad (d): \sum_n \frac{n^3}{3^n} z^n.$$

Geef aan welk criterium je gebruikt!

Opgave 5 (10 punten) *Zij $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ een functie met*

(a) f is continu op $[0,\infty)$.

(b) f is differentieerbaar op $(0,\infty)$.

(c) $f(0) = 0$.

(d) f' is monotoon stijgend (=niet dalend).

Bewijs: De functie

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}, \quad x \in (0,\infty)$$

is monotoon stijgend.

Hint: Bereken g' en bewijs $g'(x) \geq 0$ voor alle $x > 0$. Let op: Gebruik geen eigenschappen van f die niet verondersteld zijn of uit de aannames volgen!

Opgave 6 (10 punten) *Voor $x \geq 0$ defineer*

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sin(e^t) dt.$$

(a) (6 punten) Bewijs: $|f(x)| \leq 2 \cdot e^{-x}$ voor alle $x \geq 0$.

(b) (4 punten) Gebuik dit om the bewijzen dat de oneigenlijke integraal

$$\int_0^\infty \sin(e^t) dt$$

convergeert. Geef een voledig argument!

Hint: In (a) begin met de voor de hand liggende substitutie. Integreer dan partieel op een geschikte manier. Het resulaat van (a) mag je ook gebruiken om (b) te doen als je (a) niet gedaan hebt.

Oplossingen

Oplossing 1 Tijdens het college hebben we bewezen dat een convergente rij begrensd is. Er is dus een $C > 0$ zodat $|a_n| < C$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$. Omdat $\lim a_n = 0$, is er voor elk $\varepsilon > 0$ een $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ zodat $n > N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |a_n| < \varepsilon$. Voor $n > N(\varepsilon)$ geldt daarom:

$$\left|\sum_{i=0}^{n} a_i\right| \leq \left|\sum_{i=0}^{N(\varepsilon)} a_i\right| + \left|\sum_{i=N(\varepsilon)+1}^{n} a_i\right| \leq (N(\varepsilon)+1)C + (n - N(\varepsilon))\varepsilon.$$

Dus,

$$\left|\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i}{n+1}\right| \leq \frac{(N(\varepsilon)+1)C + (n-N(\varepsilon))\varepsilon}{n+1} < \frac{(N(\varepsilon)+1)C}{n+1} + \varepsilon.$$

Als nu ook $n+1 > (N(\varepsilon)+1)C/\varepsilon$, dan volgt $(N(\varepsilon)+1)C/(n+1) < \varepsilon$. Dus:

$$n > \max(N(\varepsilon), (N(\varepsilon)+1)C/\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\sum_{i=0}^{n} a_i}{n+1}\right| \leq 2\varepsilon.$$

Gezien dit voor alle $\varepsilon > 0$ geldt, hebben we bewezen dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i}{n+1} = 0.$$

Oplossing 2 We nemen aan dat $s_n \in \mathbb{C}$. (a) Stel dat $\lim s_n = s \in \mathbb{C}$. Dan

$$\sigma_n = s + \frac{(s_0 - s) + (s_1 - s) + \cdots + (s_n - s)}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Met $a_n = s_n - s$ geldt $\lim a_n = 0$ en we kunnen opgave 1 toepassen en concluderen

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s + \lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n+1} = s.$$

(b) Voorbeeld: $s_n = (-1)^n$. Deze rij convergeert zeker niet, maar

$$\sigma_n = \frac{1 + (-1)^n}{2(n+1)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(c) Ja! Voorbeeld (mischien zijn er eenvuidigere!):

$$s_n = \begin{cases} n^{1/3} & \text{als } \sqrt{n} \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{(n+1)^2} & \text{als } \sqrt{n} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

Gezien de som $C = \sum_{n\geq 1} 1/n^2$ eindig is en dat er maximaal $\sqrt{n}$ quadratgetallen $\leq n$ zijn geldt:

$$\sum_{i=0}^{n} s_i \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2}\right) + \sqrt{n}n^{1/3} = C + n^{5/6}.$$

Dus

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \sigma_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{C + n^{5/6}}{n+1} = 0,$$

en daarom $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

(d) We hebben

$$\sum_{k=1}^{n} kb_k = \sum_{k=1}^{n} k(s_k - s_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} ks_k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)s_k = ns_n - \sum_{k=1}^{n-1} s_k - s_0.$$

Dus,

$$\sigma_n + \frac{\sum_{k=1}^{n} kb_k}{n+1} = \frac{\sum_{k=0}^{n} s_k + (ns_n - \sum_{k=1}^{n-1} s_k - s_0)}{n+1} = \frac{(n+1)s_n}{n+1} = s_n,$$

wat we wilden bewijzen.

(e) Door opgave 1 op de rij $a_k = kb_k$ toe te passen krijgen we

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} kb_k}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} kb_k}{n+1} = 0.$$

Met (d) volgt: $\lim s_n - \sigma_n = 0$, dus $\lim s_n = \sigma$.

Oplossing 3 We gaan het vogende bewijzen:

Stelling 1 *Stel dat $f : F \to \mathbb{R}$ en $g : G \to \mathbb{R}$, waar $F, G \subset \mathbb{R}$, aan $g(G) \subset F$ voldoen en dat f en g uniform continu zijn. Dan is $f \circ g : G \to \mathbb{R}$ uniform continu.*

Bewijs. De conditie $g(G) \subset F$ impliciert dat $f(g(x))$ voor elk $x \in G$ gedefineerd is. Zij nu $\varepsilon > 0$. Omdat f uniform continu is, is er $\delta' > 0$ zodat

$$x, x' \in F, \quad |x - x'| < \delta' \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Omdat g uniform continu is, is er $\delta > 0$ zodat

$$x, x' \in G, \quad |x - x'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(x) - g(x')| < \delta'.$$

Hiermee volgt

$$x, x' \in G, \quad |x - x'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(x) - g(x')| < \delta' \quad \Rightarrow \quad |f(g(x)) - f(g(x'))| < \varepsilon,$$

dus $f \circ g : G \to \mathbb{R}$ is uniform continu.

Oplossing 4 (a) Met $a_n = n^3$ hebben we

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^3}{(n+1)^3}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{1 + \frac{1+3n+3n^2}{n^3}}\right| = 1.$$

Het quotientencriterium (Zorich blz 100, Corollary 10 – toegepast op machtreeksen) levert dus de convergentiestraal $R = 1$.

(b) Met $a_n = 2^n/n!$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2^n \cdot (n+1) \cdot n!}{n! \cdot 2 \cdot 2^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{2}\right| = +\infty.$$

Het quotientencriterium levert dus de convergentiestraal $R = +\infty$

(c) Met $a_n = n^n/n^2$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^n}{n^2}\right|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^{2/n}} = +\infty.$$

Het wortelcriterium (Zorich blz 270, Proposition 3) geeft dus $R = 0$.

(d) Met $a_n = n^3/3^n$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^3 \cdot 3 \cdot 3^n}{3^n(n+1)^3} \right| = 3$$

Met het quotientencriterium hebben we dus $R = 3$.

Oplossing 5 f is differentierbaar op $(0,\infty)$ (b), dus g is differentierbaar op $(0,\infty)$ met

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}.$$

We weten (Zorich blz 218, Corollary 1), dat g op $(0,\infty)$ niet afnemend is d.e.s.d.a. $g'(x) \geq 0$ voor alle $x \in (0,\infty)$. We moeten dus bewijzen dat $xf'(x) - f(x) \geq 0$ voor alle $x \in (0,\infty)$. Hiervoor geef ik twee verschillende bewijzen. (Natuurlijk was een ervan voldoende.)

(A) Voor elk $x > 0$ geldt: f is continu (a) op $[0,x]$ en diff-baar (b) op $(0,x)$. Dus volgt met de stelling van Lagrange (Zorich blz 216, Theorem 1) dat er voor elk $x > 0$ een $\xi \in (0,x)$ is zodat

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x-0).$$

Met (c) volgt: Voor elk $x > 0$ is er $\xi \in (0,x)$ zodat $f(x) = xf'(\xi)$. Nu is f' niet afnemend (d), dus: $\xi \in (0,x) \Rightarrow f'(\xi) \leq f'(x)$. Dus geldt voor elk $x > 0$ dat $f(x) \leq xf'(x)$.

(B) f' is monotoon op $(0,\infty)$, dus (Zorich blz 337, Corollary 3) is f' Riemann integreerbaar op elk interval $[a,b]$ met $0 < a < b < \infty$. Een primitieve voor f' is natuurlijk de functie f. Dus:

$$0 < a < b < \infty \quad \Rightarrow \quad f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

Nu is f' monotoon stijgend (d), dus $f'(t) \leq f'(b)$ voor alle $t \in [a,b]$. Daarom:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt \leq \int_a^b f'(b)dt = (b-a)f'(b).$$

Gezien f continu is op $[0,\infty)$ (a), kunnen we a naar null laten gaan en krijgen

$$f(b) - f(0) \leq (b-0)f'(b),$$

en met $f(0) = 0$ (c) hebben we $f(b) \leq bf'(b)$ voor alle $b \in (0,\infty)$.

Oplossing 6 (a) We substitueren $\xi = e^t$. Daarmee: $d\xi = e^t dt = \xi\, dt$, dus $dt = d\xi/\xi$, en

$$f(x) = \int_{e^x}^{e^{x+1}} \frac{\sin\xi}{\xi}\, d\xi.$$

Nu gebruiken we partiële integratie, $\int u'v = uv - \int uv'$, met

$$u'(\xi) = \sin\xi, \quad v(\xi) = \frac{1}{\xi},$$

dus

$$u(\xi) = -\cos\xi, \quad v'(\xi) = \frac{-1}{\xi^2},$$

en daarmee:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[-\cos\xi \cdot \frac{1}{\xi}\right]_{e^x}^{e^{x+1}} - \int_{e^x}^{e^{x+1}} (-\cos\xi)\cdot\frac{-1}{\xi^2}d\xi \\ &= \frac{-\cos(e^{x+1})}{e^{x+1}} + \frac{\cos(e^x)}{e^x} - \int_{e^x}^{e^{x+1}} \cos\xi \cdot \frac{1}{\xi^2}d\xi \end{aligned}$$

Daarom:

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \left|\frac{\cos(e^{x+1})}{e^{x+1}}\right| + \left|\frac{\cos(e^x)}{e^x}\right| + \int_{e^x}^{e^{x+1}} \left|\cos\xi \cdot \frac{1}{\xi^2}\right| d\xi \\ &\leq \frac{1}{e^{x+1}} + \frac{1}{e^x} + \int_{e^x}^{e^{x+1}} \frac{1}{\xi^2}d\xi \\ &= \frac{1}{e^{x+1}} + \frac{1}{e^x} + \left[\frac{-1}{\xi}\right]_{e^x}^{e^{x+1}} \\ &= \frac{1}{e^{x+1}} + \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{x+1}} + \frac{1}{e^x} \\ &= 2\cdot e^{-x}. \end{aligned}$$

(b) Voor alle $x \geq 0$ geldt

$$\int_0^x \sin(e^t)dt = \int_0^{\lfloor x\rfloor} \sin(e^t)dt + \int_{\lfloor x\rfloor}^x \sin(e^t)dt,$$

waar $\lfloor x\rfloor$ het grootste natuurlijke getal $n \leq x$ is. Nu

$$\left|\int_{\lfloor x\rfloor}^x \sin(e^t)dt\right| \leq \int_{\lfloor x\rfloor}^x \left|\sin(e^t)dt\right| \leq \int_{\lfloor x\rfloor}^{\lfloor x\rfloor+1} \left|\sin(e^t)dt\right| = |f(\lfloor x\rfloor)| \leq 2\cdot e^{-\lfloor x\rfloor}.$$

Gezien dit naat null gaat als $x \to +\infty$, geldt

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ x\in\mathbb{R}}} \int_0^x \sin(e^t)dt = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}}} \int_0^n \sin(e^t)dt = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}}} \sum_{i=0}^{n-1} \int_i^{i+1} \sin(e^t)dt = \sum_{i=0}^{\infty} \int_i^{i+1} \sin(e^t)dt = \sum_{i=0}^{\infty} f(i),$$

en deze reeks is (zelfs absoluut) convergent:

$$\sum_{i=0}^{\infty} |f(i)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} 2e^{-i} = 2\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^i = \frac{2}{1-e^{-1}} < \infty$$

omdat $\frac{1}{e} < 1$.