

Toelichting:

- Je mag Zorich deel I en II gebruiken, maar geen ander hulpmiddelen (zoals andere boeken, aantekeningen, rekenmachine etc.)!
- Als je bekende stellingen gebruikt willen we volledige referenties zien (bijv.: Zorich II, blz 123, Stelling 5), waar je ook duidelijk maakt dat aan de voorwaarden voldaan is.
- Per opgave zijn 10 punten te behalen. Als je één opgave volledig weglaat kun je nog steeds een 10 halen.

Opgave 1 *Bekijk de functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{als } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{als } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) *Laat zien dat f op heel $\mathbb{R}^2$ continu is.*
- (b) *Laat zien dat f in het punt $(0, 0)$ niet differentieerbaar is (in de zin van Zorich II, blz 61, Def. 1.)*
- (c) *Ga na of de partiële afgeleiden van f in het punt $(0, 0)$ bestaan.*
- (d) *Waarom is er geen contradictie?*

Opgave 2 *Laat zien dat het stelsel*

$$\begin{aligned} 3x + y - z + u^2 &= 0 \\ x - y + 2z + u &= 0 \\ 2x + 2y - 3z + 2u &= 0 \end{aligned}$$

naar x, y, u als functie van z , naar x, z, u als functie van y en naar y, z, u als functie van x opgelost kan worden, maar niet naar x, y, z als functie van u .

Zie vervolg op achterkant!!

- (a) Zij $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ en zij $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continu. Bewijs dat de geïtereerde integralen

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy, \quad \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$$

bestaan en gelijk zijn.

- (b) Gebruik de geïtereerde integraal $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} 1 \cdot dy$ om te laten zien dat niet elke geïtereerde integraal door de stelling van Fubini uit een dubbele integraal ontstaat.

Opgave 4 Zij $0 < a < b$ en bekijk de afbeelding $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$F(x_1, x_2, x_3) = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - b \right)^2 + x_3^2 - a^2.$$

- (a) Laat zien dat $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid F(x_1, x_2, x_3) = 0\}$ een C^1 -oppervlakte van dimensie twee is.
- (b) Geef een parametrisatie van S . **Hint:** Gebruik twee hoek-variabelen.
- (c) Laat zien dat $S \subset \mathbb{R}^3$ compact is.
- (d) Geef een meetkundige karakterisering van $S \subset \mathbb{R}^3$. (Dus: Hoe ziet S er uit?)

Opgave 5 Zij (X, d) een volledige metrische ruimte en $f : X \rightarrow X$ een afbeelding zodanig dat $f^n \equiv \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ keer}}$ een contractie is, voor een zekere $n \in \mathbb{N}$. Laat zien dat f een uniek vast punt heeft.

Oplossingen

Oplossing 1 (a) De teller en noemer van f zijn continue functies, en voor $(x, y) \neq (0, 0)$ is de noemer ongelijk nul, dus f continu. Voor $(x, y) \neq (0, 0)$ geldt

$$|f(x, y)| = \frac{|x^3|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x^3|}{x^2} = |x|.$$

(De ongelijkheid $|f(x, y)| \leq |x|$ geldt nu ook voor $(x, y) = (0, 0)$.) Als nu $\{(x_i, y_i)\}$ een rij in $\mathbb{R}^2$ is die naar $(0, 0)$ convergeert, dan geldt $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$ en met bovenstande schatting $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i, y_i) = 0 = f(0, 0)$. Dus f is continu in $(0, 0)$. [Alternatief kun je poolcoördinaten gebruiken ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$). Dan geldt $f(r, \theta) = r \cdot \cos^3 \theta$, en dit gaat naar nul als $r \rightarrow 0$, voor alle θ .]

(b) Stel dat f in $(0, 0)$ wel differentieerbaar is. Er is dus een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zodanig dat

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f(h_1, h_2) - f(0, 0) - Ah}{\|h\|} = 0,$$

te weten

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\frac{h_1^3}{h_1^2 + h_2^2} - A_1 h_1 - A_2 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0,$$

of met pool-coördinaten

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{r^3 \cos^3 \theta}{r^2} - A_1 r \cos \theta - A_2 r \sin \theta}{r} = 0.$$

Maar de vergelijking

$$\cos^3 \theta - A_1 \cos \theta - A_2 \sin \theta = 0$$

heeft geen oplossing (A_1, A_2) , dus $f'(0, 0)$ bestaat niet.

(c) Per definitie is

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0, \end{aligned}$$

en we zien dat de limieten bestaan.

(d) We berekenen de partiële afgeleiden van f voor $(x, y) \neq (0, 0)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{3x^2}{x^2 + y^2} - \frac{2x \cdot x^3}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -\frac{2y \cdot x^3}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$

of in pool-coördinaten

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(r, \theta) &= 3 \cos^2 \theta - 2 \cos^4 \theta, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(r, \theta) &= -2 \sin \theta \cos^3 \theta. \end{aligned}$$

De limiet van deze uitdrukkingen voor $r \rightarrow 0$ hangt van θ af, en daarom zijn de partiële afgeleiden in $(0, 0)$ niet continu (terwijl ze overal bestaan). De stelling (Zorich II, blz 78, Theorem 2) is dus niet van toepassing.

Oplossing 2 We noemen de drie functies in het stelsel F_1, F_2, F_3 , en in plaats van x, y, x, u schrijven we $x_1, \dots, x_4$. Om de inverse functie stelling toe te passen, moet $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ differentieerbaar zijn, en het is duidelijk dat dit geldt. De partiële afgeleiden $\partial F_i / \partial x_i$ zijn zo berekend:

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2x_4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Om het stelsel naar z op te lossen moet de matrix

$$A_z = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2x_4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

rang drie hebben. We hebben

$$\det A_z = -6 + 2 + 4x_4 + 4x_4 - 6 - 2 = 8x_4 - 12,$$

en behalve voor $x_4 = 3/2$ is dit ongelijk nul, dus het stelsel kan naar $z = x_3$ opgelost worden.

(b) Idem met

$$A_y = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2x_4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det A_y = 12 - 2 - 6x_4 - 8x_4 + 9 + 2 = -14x_4 + 21,$$

en dit is $\neq 0$ als $x_4 \neq 3/2$.

(c) Idem met

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2x_4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det A_x = 4 - 2 + 6x_4 - 8x_4 + 3 - 2 = -2x_4 + 3,$$

en dit is $\neq 0$ als $x_4 \neq 3/2$.

(d) Als we x, y, z als functies van u willen bekijken, krijgen we een lineair stelsel voor x, y, z , namelijk $A_u \cdot (x, y, z)^t = (-u^2, -u, -2u)^t$. Maar de matrix A_u is niet inverteerbaar: de eerste rij is gelijk aan de som van de tweede en de derde. De som van de tweede en derde vergelijking levert

$$3x + y - z + 3u = 0,$$

en dit is compatiebel met de eerste vergelijking alleen als $3u = u^2$, dus voor $u \in \{0, 3\}$.

Opmerking: Er is dus geen oplossing van het stelsel met de waarde $u = 3/2$ die we in a) t/m c) zijn tegengekomen.

Oplossing 3 (a) Het gebied $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ is begrensd en heeft de rand

$$\partial E = \{(x, 0) \mid x \in [0, 1]\} \cup \{(1, y) \mid y \in [0, 1]\} \cup \{(x, x) \mid x \in [0, 1]\}.$$

Dit is een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ van maat null. (Bijv. Zorich II, blz 110, voorbeeld 2.) Dus E is 'admissible' en elke continue functie is Riemann integreerbaar over E . (Zorich II, blz 119, Theorem 1). We kunnen dus (Zorich II, blz 127, Theorem) en (Zorich II, blz 130, Corollarium 3) toepassen en zien dat beide integralen in de opgave gelijk zijn aan $\int_E f(x, y) dx dy$.

(b) Met $E = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq \phi(x)\}$ geldt (Zorich II, ...)

$$\int_E f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\phi(x)} dy f(x, y).$$

Maar dit kunnen we niet op ons integraal toepassen omdat $\sin x$ op $[0, 2\pi]$ het teken wisselt en er daarom geen meetkundige interpretatie voor het integraal $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} 1 \cdot dy$ is.

Oplossing 4 (a) We berekenen de partiële afgeleiden van F :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= 2(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - b) \frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{2x_1(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - b)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= \frac{2x_2(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - b)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} &= 2x_3. \end{aligned}$$

Zij $x \in S = F^{-1}(0)$. Als $x_3 \neq 0$ dan is $\partial_3 F \neq 0$. Als $x_3 = 0$ dan is $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - b = a > 0$. Verder is $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = a + b > 0$ en dus zijn x_1 en x_2 niet beide nul. Dus $\partial_1 F \neq 0$ of $\partial_2 F \neq 0$. We concluderen dat $F'(x) \neq 0$ voor alle $x \in F^{-1}(0)$. Nu volgt met (Zorich II, blz 164, Example 1) dat $S = F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^3$ een 2-dimensionaale C^1 -oppervlakte is.

(b) Met $z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - b$ komt $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ neer op $z^2 + x_3^2 = a^2$, en de oplossingen hiervan kunnen we parametriseren door $(z, x_3) = (a \cos \theta, a \sin \theta)$ met $a \in [0, 2\pi]$. Vanwege $0 < a < b$ geldt steeds $b + a \cos \theta \geq 0$, en daarom is $z = a \cos \theta$ equivalent aan

$$x_1^2 + x_2^2 = (b + a \cos \theta)^2.$$

De oplossingen hiervan kunnen we parametriseren door $(x_1, x_2) = (b + a \cos \theta)(\cos \phi, \sin \phi)$, en daarmee volgt dat de afbeelding

$$f : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\theta, \phi) \mapsto \begin{pmatrix} (b + a \cos \theta) \cos \phi \\ (b + a \cos \theta) \sin \phi \\ a \sin \theta \end{pmatrix}$$

een bijectie is.

(c) De functie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is continu, dus $S = F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^3$ is afgesloten. Uit de vorm van F volgt dat $x \in S$ impliceert dat $|x_3| \leq a$ en $|\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - b| \leq a$ en dus $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq a + b$. Dus S is begrensd en afgesloten en daarom compact. [Alternatief: $S = f([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$, en het beeld van een compacte verzameling onder een continue functie is compact.]

(d) De afbeelding f kunnen we bekijken als een injectieve afbeelding van de 2-torus $T^2 = S^1 \times S^1$ naar $\mathbb{R}^3$. Gezien $S = f(T^2)$ compact is, is $f : T^2 \rightarrow S$ een homeomorfisme. Dus: S “is” een 2-torus.

Oplossing 5 De contractiestelling (Zorich II, blz 34) geeft ons dat f^n een unieke vaste punt $x_0 \in X$ heeft. Als x een vaste punt van f is, dan is hij natuurlijk ook een vaste punt van f^n en dus geldt $x = x_0$. Dus, als f überhaupt een vaste punt heeft, dan is dit x_0 . Maar dit impliceert niet dat $f(x_0) = x_0$!! We weten dat $f^n(x_0) = x_0$, dus de baan

$$\mathcal{O}(x_0) = \{f^i(x_0) \mid i \in \mathbb{N}_0\}$$

van x_0 is eindig, en $f(x_0) = x_0$ is equivalent aan $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0\}$. Zij $y \in \mathcal{O}(x_0)$. Dan is $y = f^i(x_0)$ voor een zeker $i \in \mathbb{N}_0$, en dus

$$f^n(y) = f^n(f^i(x_0)) = f^{n+i}(x_0) = f^i(f^n(x_0)) = f^i(x_0) = y.$$

Dus: elk $y \in \mathcal{O}(x_0)$ is een vaste punt van f^n . Maar die is uniek, dus $y = x_0$. Hieruit volgt $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0\}$, en we zijn klaar.

LET OP: Dat f^n een contractie is impliceert **niet** dat f een contractie is!! Tegenvoorbeeld: $X = \mathbb{R}^2$ met de euclidische metriek en $f : (x, y) \mapsto (y, x/2)$. Dan is $f^2(x, y) = (x/2, y/2)$ een contractie, terwijl uit $d(f(0, a), f(0, b)) = d((a, 0), (b, 0)) = d((0, a), (0, b))$ volgt dat f geen contractie is.