Tentamen Analyse III, Voorjaar 2007

6.7.2007

Toelichting:

- Je mag Zorich deel I en II en de uitgedeelde texten gebruiken, maar geen ander hulpmiddelen (zoals andere boeken, aantekeningen, rekenmachine etc.)!
- Als je bekende stellingen gebruikt willen we volledige referenties zien (bijv.: Zorich II, blz 123, Stelling 5), waar je ook duidelijk maakt dat aan de voorwaarden voldaan is.

Opgave 1 *Zij* $\{f_n\}$ *een rij van continue functies* $[0,1] \to \mathbb{R}$ *zodanig dat* f_n *op* $(0,1)$ *uniform convergeert als* $n \to \infty$. *Bewijs dat* f_n *uniform op* $[0,1]$ *convergeert.*

Opgave 2 *Bekijk de functies*

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt, \qquad g(x) = \int_x^\infty \frac{\sin(t-x)}{t}\, dt.$$

(a) *Laat zien dat de integralen voor* $x \geq 0$ *convergeren en continue functies op* $[0,\infty)$ *definiëren.*

(b) *Laat zien dat* $f, g \in C^1((0,\infty))$ *en dat we* $f'(x)$ *en* $g'(x)$ *kunnen berekenen door onder het integraalteken naar* x *te differentieren.*

(c) *Bewijs dat* $f''(x) + f(x) = g''(x) + g(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$.

(d) *Bewijs dat* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

(e) *Concludeer dat* $f(x) = g(x)$ *op* $[0,\infty)$. *Waarom?*

NB: Geef bij elke stap aan waarom die mag, met referenties naar Zorich!

Zie vervolg op achterkant!!

Opgave 3 *Zij* $f \in C^1([0,T])$ *periodiek met* $\int_0^T f(x)dx = 0$*, waar* $T > 0$*. Bewijs*

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi} \int_0^T |f'(t)|^2 dt.$$

Hint: Parseval.

Opgave 4 *Bekijk de functies* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *gegeven door*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}.$$

(a) Bereken $\widehat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx$*.*

(b) Bewijs dat $g(x) = (f * f)(x)$ *($*$ is convolutie).*

(c) Gebruik (a) en (b) om $\widehat{g}(\xi)$ *te berekenen.*

(d) Gebruik de Poisson sommatieformule (waarom mogen we die gebruiken?) om te concluderen dat

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin \pi\alpha}\right)^2 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}.$$

Oplossingen

Oplossing 1 Het is voldoende als we bewijzen dat er voor elk $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ is zodanig dat

$$n > N, m > N \;\Rightarrow\; (|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \;\; \forall x \in [0,1]). \tag{1}$$

Want dan volgt uit de volledigheid van $C([0,1])$ t.o.v. de $\|\cdot\|_\infty$-norm dat $f_n \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} f$ op $[0,1]$.

Zij dus $\varepsilon > 0$. Omdat f_n op $(0,1)$ uniform convergeert is er een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat

$$n > N, m > N \;\Rightarrow\; (|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \;\; \forall x \in (0,1)).$$

Nu zijn f_n en f_m continu, we mogen dus de limiet $x \to 0$ nemen en krijgen

$$n > N, m > N \;\Rightarrow\; (|f_n(0) - f_m(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}).$$

Merk op dat we nu $\leq$ i.p.v. $<$ hebben! Analoog voor $x \to 1$. Dus

$$n > N, m > N \;\Rightarrow\; (|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \;\; \forall x \in [0,1]),$$

en aan (1) is voldaan.

Oplossing 2 (a) Vanwege $e^{-tx} \leq 1$ voor $x \in [0,\infty)$ en het feit dat $\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt < \infty$ is de integraal uniform convergent voor $x \in [0,\infty)$. Dus f is continu. Verder

$$g(x) = \int_x^\infty \frac{\sin(t-x)}{t}\, dt = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t+x} dt$$

(b) We kunnen f willekeurig vaak onder het integraalteken t.o.v. x differentieren en krijgen steeds een absoluut convergent integraal. ...

(c) Gezien (b), mogen we rekenen zoals volgt:

$$f'(x) = \int_0^\infty \frac{-te^{-tx}}{1+t^2}\, dt, \qquad f''(x) = \int_0^\infty \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2}\, dt,$$

dus

$$f''(x) + f(x) = \int_0^\infty \frac{(t^2+1)e^{-tx}}{1+t^2}\, dt = \int_0^\infty e^{-tx}\, dt = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-y} dy = \frac{1}{x}.$$

$$g'(x) = \int_x^\infty \frac{-\cos(t-x)}{t}\, dt - \frac{\sin(t-x)}{t}_{|t=x} = -\int_x^\infty \frac{\cos(t-x)}{t}\, dt,$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\int_x^\infty \frac{\sin(t-x)}{t}\, dt - \left(-\frac{\cos(t-x)}{t}\right)_{|t=x} \\ &= -\int_x^\infty \frac{\sin(t-x)}{t}\, dt + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Dus $g''(x) + g(x) = 1/x$.

(d) Kies $\varepsilon > 0$. Dan

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt = \int_0^\varepsilon \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt + \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt \\ &\leq \varepsilon + e^{-\varepsilon x} \int_\varepsilon^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt. \end{aligned}$$

De twede term gaat naar nul als $x \to \infty$. Gezien $\varepsilon > 0$ willekeurig was, volgt $f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$. Dat $g(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$ volgt uit

$$g(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t+x} dt$$

met een soortgelijk argument.

(e) Uit (c) volgt dat $h = f - g$ aan $h''(x) + h(x) = 0$ voldoet. Dus $h(x) = A\cos x + B\sin x$. Uit (d) volgt $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$, en dit geldt alleen als $A = B = 0$. Dus $h \equiv 0$ en $f = g$.

Oplossing 3 We hebben

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{2\pi i n x/T},$$

waar

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-2\pi i n x/T} dx.$$

De formule van Plancherel geeft

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Analoog voor $f \to f'$. Partiële interatie levert

$$c_n(f') = \frac{-2\pi i n}{T} c_n(f).$$

Nu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T |f'(x)|^2 dx &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \frac{-2\pi i n c_n(f)}{T} \right|^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2 \\ &\geq \frac{4\pi^2}{T^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{4\pi^2}{T^3} \int_0^T |f(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

en dit is equivalent aan de gewenste ongelijkheid. (We hebben gebruikt dat $c_0(f) = 0$ en $n^2 \geq 1$ voor $n \neq 0$.)

Oplossing 4 (a)

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{-1}^1 e^{-2\pi i \xi x} dx = \frac{1}{-2\pi i \xi} [e^{-2\pi i \xi x}]_{-1}^1 = \frac{\sin 2\pi\xi}{\pi\xi}.$$

(b)

$$(f * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)f(t)dt = \int_{-1}^{1} f(x-t)dt = \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt = \int_{[x-1,x+1]\cap[-1,1]} 1\,dt,$$

en dit is gelijk aan g. (Tekening.)

(c) Uit (b) en $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$ volgt

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)^2 = \frac{\sin^2(2\pi\xi)}{\pi^2\xi^2}.$$

(d) We passen de formule

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{F}(n)e^{2\pi inx}$$

op $F = \widehat{g}$ toe. (Hiervoor is voldoende dat $F(x) = O(1/x^2)$ en $\widehat{F}(x) = O(1/x^2)$, waaraan g en $\widehat{g}$ voldoen.) We krijgen:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\sin\pi(x+n)}{\pi(x+n)}\right)^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(n)e^{2\pi inx}.$$

Uit de definitie van g volgt meteen dat het rechterlid gelijk aan 1 is. Dus

$$1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\sin\pi(x+n)}{\pi(x+n)}\right)^2.$$

Nu is $\sin\pi(x+n) = \pm\sin\pi x$, dus:

$$1 = \sin^2\pi x \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{\pi(x+n)}\right)^2,$$

ofwel

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x+n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2\pi x}.$$