Tentamen Inleiding Fouriertheorie, Voorjaar 2008

10.4.2008

Toelichting:

- Je mag geen hulpmiddelen (zoals aantekeningen, rekenmachine etc.) gebruiken, behalve de volgende boeken: Stein/Shakarchi: Fourier analysis, Zorich deel I en II en de analyse boeken (maar niet de Fourier theorie) van van Rooij en Kortram.
- Als je stellingen uit Stein/Shakarchi gebruikt willen we volledige referenties zien, waar je ook duidelijk maakt dat aan de voorwaarden voldaan is.

Opgave 1 *Bekijk de* 2π*-periodieke* **oneven** *functie die op* $[0, \pi]$ *door* $f(x) = x(\pi - x)$ *gedefineerd is.*

(i) Maak een schets van de grafiek van de functie.

(ii) Bereken de Fourier coëfficienten van f*.*

(iii) <u>Bewijs</u> dat

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{\substack{k \geq 1 \\ \text{oneven}}} \frac{\sin kx}{k^3} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Opgave 2 *Zij* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *continu met* **support** *(drager) in* $[0, 1/2]$ *en de eigenschap dat* $\widehat{f}$ **compacte support** *heeft.*

(i) Ontwikkel f *op het interval* $[0, 1]$ *in een Fourier reeks.*

(ii) Laat zien dat f *(op* $[0, 1]$*) gelijk is aan een trigonometrische veelterm.*

(iii) Laat zien: hieruit volgt dat $f = 0$*.*

(iv) Bewijs de volgende generalisatie: Als $f \in C(\mathbb{R})$ *is en* $f, \widehat{f}$ *compacte drager hebben, dan is* $f = 0$*.*

Zie vervolg op achterkant!!

Opgave 3 *Zij* $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ *de afbeelding die aan een functie* $f \in \mathcal{S}$ *de Fourier getransformeerde* $\widehat{f} \in \mathcal{S}$ *toevoegt, dus* $\mathcal{F}(f)(x) = \widehat{f}(x)$.

(i) Bewijs $\mathcal{F}^4 = \mathrm{id}$, *i.e.* $\mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)))) = f$.

(ii) Zij $f \in \mathcal{S},\ f \not\equiv 0$ *zodanig dat* $\widehat{f}(x) = Af(x)$ *met* $A \in \mathbb{C}$. *Welke waarden voor* A *zijn mogelijk?*

Opm: We weten dat $A = 1$ *kan, omdat* $\widehat{f} = f$ *voor* $f(x) = e^{-\pi x^2}$.

(iii) BONUS: Geef oplossingen ($\neq 0$) *van* $\widehat{f} = Af$ *voor* $A \neq 1$ *aan.*

Opgave 4 *Zij* $\Omega = \{0 < x < 1,\ 0 < y\} \subset \mathbb{R}^2$. *Zij* $f \in C([0,1])$ *reelwaardig met* $f(0) = f(1) = 0$. *Wij zoeken een reelwaardige functie* $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ *met de eigenschappen*

(a) $u \in C(\overline{\Omega})$ *en* $u \in C^2(\Omega)$.

(b) $\Delta u = 0$ *op* Ω.

(c) $\lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0$ *voor alle* $x \in [0,1]$.

(d) $u(0,y) = u(1,y) = 0$ *voor alle* $y \geq 0$.

(e) $u(x,0) = f(x)$ *voor alle* $x \in [0,1]$.

Aanleiding:

(i) Laat zien dat de algemene oplossing van de condities (a) t/m (d) van de vorm

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x) e^{-n\pi y} \tag{1}$$

is. (Hint: Separatie der variablen.)

(ii) Bepaal $a_n, n \in \mathbb{N}$ *zodanig dat* u *aan conditie (e) voldoet.*

(iii) Bepaal een functie $K(x,y,z)$ *zodanig dat*

$$u(x,y) = \int_0^1 K(x,y,z) f(z) dz, \qquad (x,y) \in \Omega$$

geldt.

LET OP: Uitrekenen van de oneindige som wordt niet verwacht, maar telt als BONUS!

Oplossingen

Oplossing 1 (i)

(ii) Voor een oneven functie is $a_0 = 0$ en

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)(e^{-inx} - e^{inx})dx = \frac{-2i}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Hiermee geldt $a_{-n} = -a_n$. Daarom

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(e^{inx} - e^{-inx}) = 2i\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx).$$

Of:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

met

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi x - x^2)\sin(nx)dx$$

Partiële integratie:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx &= -\int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{-n} + \left[x\frac{\cos(nx)}{-n}\right]_0^{\pi}\\ &= \frac{1}{n^2}[\sin(nx)]_0^{\pi} - \frac{\pi\cos(n\pi)}{n} = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx &= -\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n} + \left[x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}\\ &= \frac{1}{n^2}[\cos(nx)]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2}((-1)^n - 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x^2\sin(nx)dx &= -\int_0^{\pi} 2x\frac{\cos(nx)}{-n}dx + \left[x^2\frac{\cos(nx)}{-n}\right]_0^{\pi}\\ &= \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx + \frac{(-1)^{n+1}\pi^2}{n}\\ &= \frac{2}{n^3}((-1)^n - 1) + \frac{(-1)^{n+1}\pi^2}{n}\end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} - \left[\frac{2}{n^3}((-1)^n - 1) + \frac{(-1)^{n+1}\pi^2}{n}\right]\right) = \frac{4}{n^3\pi}(1 - (-1)^n)\\ &= \begin{cases}\frac{8}{n^3\pi} & n \text{ odd}\\ 0 & n \text{ even}\end{cases}\end{aligned}$$

(iii) De reeks

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = \frac{8}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{oneven}}}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}.$$

is uniform convergent naar een continue functie. Gezien f periodiek en continu is, volgt uit de eenduidigheidsstelling dat de reeks overal naar f convergeert.

Oplossing 2 (i) $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x}$, waar $a_n = \int_0^1 f(x)\, e^{-2\pi i n x} dx$. (Op dit moment weten we nog niets over de convergentie van de som.)

(ii) f is nul buiten $[0, 1/2]$. Dus $a_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i n x} dx = \widehat{f}(n)$. Dus

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e^{2\pi i n x}. \tag{2}$$

Gezien $\widehat{f}$ compacte drager heeft is $\widehat{f}(n)$ maar voor eindig veel waarden $n \in \mathbb{Z}$ ongelijk nul, de reeks is dus trivialiter convergent en f is een trigonometrische veelterm (op $[0, 1]$).

(iii) We weten dat (2) voor alle $x \in [0, 1]$ geldt. Maar per aanname is $f(x) = 0$ op $(1/2, 1]$. Maar een trigonometrische veelterm die op een open interval nul is is overal nul. (Dit volgt bijv. uit de eenduidigheidsstelling voor Fourierreeksen.)

(iv) Stel dat f drager in $[a, b]$ heeft. Dan heeft $g(t) = f(a + 2(b - a)t)$ drager in $[0, 1/2]$. Natuurlijk heeft ook $\widehat{g}$ compacte drager. (Volgt uit het gedrag van Fouriertransformatie onder translatie en scalering.) Met (iii) volgt $g \equiv 0$, dus $f \equiv 0$.

Oplossing 3 (i) Zij $\widehat{\mathcal{F}} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ de inverse Fourier transformatie. Dus

$$\widehat{\mathcal{F}}(f)(x) = \int f(y) e^{2\pi i x y} dy.$$

We zien dat $\widehat{\mathcal{F}}(f)(x) = \mathcal{F}(f)(-x)$ is. Met $\widehat{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)) = f$ volgt $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x) = f(-x)$. Hieruit volgt meteen dat $\mathcal{F}^4(f) = f$.

(ii) Zij $\mathcal{F}(f) = Af$. Dan geldt $f = \mathcal{F}^4(f) = A^4 f$. Met $f \not\equiv 0$ volgt $A^4 = 1$, dus $A \in \{1, -1, i, -i\}$.

Oplossing 4 We schrijven $u(x, y) = v(x)w(y)$. Inzetten in $\Delta u = 0$ levert

$$v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0.$$

Op de questie na wat er gebeurt als $v = 0$ of $w = 0$ is dit equivalent aan

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)}.$$

Het linkerlid is onafhankelijk van y, het rechterlid onafhankelijk van x. Er moet dus een constante A zijn zodanig dat

$$A = \frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)}.$$

Dus

$$v''(x) = Av(x), \qquad w''(y) = -Aw(y).$$

Als $A > 0$ is heeft de GDV voor v exponentiële oplossingen, en als die voor in $x = 0$ en $x = 1$ nul zijn zijn ze identiek nul. We moeten dus A negatief kiezen. We schrijven $A = -B^2$ en krijgen

$$v''(x) + B^2 v(x) = 0, \qquad w''(y) = B^2 w(y).$$

De oplossingen hiervan zijn

$$v(x) = c_1 \sin(Bx) + c_2 \cos(Bx), \qquad w(x) = c_3 e^{By} + c_4 e^{-By}.$$

De randvoorwaarde $u(0, y) = u(1, y) = 0$ leidt op

$$c_2 = 0, \qquad B = n\pi \ \text{ met } \ n \in \mathbb{N}.$$

($n \in -\mathbb{N}$ zou niets nieuws opleveren.) De conditie $u \to 0$ voor $y \to +\infty$ impliciert $c_3 = 0$. Een oplossing is dus

$$u(x, y) = \sin(n\pi x)e^{-n\pi y},$$

waaruit de aangegeven algemene oplossing (1) volgt.

(ii) Als we in (1) $y = 0$ zetten krijgen we

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x).$$

Met de orthogonaliteitsrelatie voor de functies $\sin(n\pi x)$ volgt

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx.$$

(iii) Voor $y > 0$ krijgen we dus

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)e^{-n\pi y} \int_0^1 f(z) \sin(n\pi z) dz \\ &= \int_0^1 K(x, y, z) f(z) dz \end{aligned}$$

met

$$K(x, y, z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x) \sin(n\pi z) e^{-n\pi y}.$$

(We mogen integratie en sommatie verwisselen omdat de som vanwege de faktor $e^{-n\pi y}$ uniform convergeert als $y > 0$.)

Die som kunnen we expliciet uitrekenen:

$$
\begin{aligned}
K(x,y,z) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\pi x}-e^{-in\pi x}}{2i}\,\frac{e^{in\pi z}-e^{-in\pi z}}{2i} e^{-n\pi y} \\
&= \frac{-1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(e^{in\pi x}-e^{-in\pi x})(e^{in\pi z}-e^{-in\pi z})e^{-n\pi y} \\
&= \frac{-1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[e^{in\pi(x+z)}-e^{in\pi(x-z)}-e^{in\pi(z-x)}-e^{-in\pi(x+z)}]e^{-n\pi y} \\
&= \frac{-1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[e^{n\pi(i(x+z)-y)}-e^{n\pi(i(x-z)-y)}-e^{n\pi(i(z-x)-y)}-e^{n\pi(-i(x+z)-y)}] \\
&= \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{\pi(i(x+z)-y)}}-\frac{1}{1-e^{\pi(i(x-z)-y)}}-\frac{1}{1-e^{\pi(i(z-x)-y)}}+\frac{1}{1-e^{\pi(-i(x+z)-y)}}-4\right) \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$