

Hertentamen Inleiding Fouriertheorie, Voorjaar 2008

21.8.2008

Toelichting:

- Je mag geen hulpmiddelen (zoals aantekeningen, rekenmachine etc.) gebruiken, behalve de volgende boeken: Stein/Shakarchi: Fourier analysis, Zorich deel I en II en de analyse boeken (maar niet de Fourier theorie) van van Rooij en Kortram.
- Als je stellingen uit Stein/Shakarchi gebruikt willen we volledige referenties zien, waar je ook duidelijk maakt dat aan de voorwaarden voldaan is.
- Onze conventies zijn zoals in Stein/Shakarchi, dus:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi x \xi} dx.$$

- In totaal zijn **30 punten** te halen. Bij elke opgave is zijn aantal punten aangegeven.

Opgave 1 (10 punten) Zij $0 < \delta < \pi$. Bekijk de 2π -periodieke functie die op $[-\pi, \pi]$ door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } |x| > \delta \\ 1 - |x|/\delta & \text{als } |x| \leq \delta \end{cases}$$

gedefinieerd is. Maak een schets en laat zien dat

$$f(x) = \frac{\delta}{2\pi} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\delta}{n^2 \pi \delta} \cos nx.$$

Inclusief argument voor convergentie!

Opgave 2 (5 punten) Zij $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ een rij van Riemann integreerbare functies op $[0, 1]$ zodanig dat

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_k(x) - f(x)| dx = 0.$$

Laat zien dat $\widehat{f}_k(n) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \widehat{f}(n)$ (dus convergentie uniform in n als $k \rightarrow \infty$).

Opgave 3 (9 punten) We zoeken een oplossing van $\Delta u = 0$ (met $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$) op het gebied

$$\Omega = \mathbb{R} \times (0, 1) = \{(x, y) \mid -\infty < x < \infty, 0 < y < 1\}$$

die op $\overline{\Omega}$ continu is en aan de randvoorwaarden $u(x, 0) = f_0(x)$, $u(x, 1) = f_1(x)$ voldoet, waar $f_0, f_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gegeven zijn.

(a) Laat zien dat $\widehat{u}(\xi, y)$ (de Fourier getransformeerde van u t.o.v. x) aan

$$\widehat{u}(\xi, y) = \frac{\sinh(2\pi(1-y)\xi)}{\sinh(2\pi\xi)} \widehat{f}_0(\xi) + \frac{\sinh(2\pi y\xi)}{\sinh(2\pi\xi)} \widehat{f}_1(\xi)$$

voldoet.

(b) Laat zien dat

$$u(x, y) = \frac{\sin \pi y}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(x-t)}{\cosh \pi t - \cos \pi y} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(x-t)}{\cosh \pi t + \cos \pi y} dt \right).$$

Je mag zonder bewijs gebruiken dat de Fourier getransformeerde van

$$\phi(x) = \frac{\sin \pi a}{2} \cdot \frac{1}{\cosh \pi x + \cos \pi a}$$

door

$$\widehat{\phi}(\xi) = \frac{\sinh 2\pi a\xi}{\sinh 2\pi\xi}$$

gegeven is.

(c) (BONUS) Wat kun je over het gedrag van u zeggen als $y \rightarrow 0$, $y \rightarrow 1$ of $x \rightarrow \pm\infty$?

Opgave 4 (6 punten) Zij $N \in \mathbb{Z}$. Je weet dat een character van een Abelsche groep A een homomorfisme $\phi: A \rightarrow \mathbb{T}$ is, waar $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Laat zien dat

(a) elke character ϕ van de groep $\mathbb{Z}$ van de vorm

$$\phi(n) = e^{in\xi}$$

is voor een zeker uniek $\xi \in [0, 2\pi)$.

(b) elke character ϕ van de groep $\mathbb{Z}_N$ (de additive groep van gehele getallen modulo N) van de vorm

$$\phi(n) = e^{\frac{i2\pi nm}{N}}$$

is voor een uniek $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$.

(c) elke **continue** character ϕ van de groep $\mathbb{R}$ is van de vorm

$$\phi(x) = e^{ix\xi}$$

voor een zeker uniek $\xi \in \mathbb{R}$.

(d) elke **continue** character ϕ van de groep $S^1 = \mathbb{T}$ is van de vorm

$$\phi(x) = x^n$$

voor een zeker uniek $n \in \mathbb{Z}$.

Oplossingen

Oplossing 1 We zien meteen dat f reëelwaardig en **even** is: $f(x) = f(-x)$. Daarom is het handiger om de reële formulering

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

met

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (n \geq 1)$$

van de Fourier reeks te gebruiken, want voor een even functie geldt $b_n = 0 \forall n$. Om te beginnen

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} (\text{oppervlakte tussen de grafiek van } f \text{ en de x-as}) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2\pi}.$$

(Hiervoor is het handig om een tekening te hebben!) Verder:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{x}{\delta}\right) \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\delta} \cos(nx) dx - \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} x \cos(nx) dx \right) \end{aligned}$$

Nu is

$$\begin{aligned} \int \cos(nx) dx &= \frac{1}{n} \sin(nx) + C \\ \int x \cos(nx) dx &= x \frac{\sin(nx)}{n} - \int \frac{\sin(nx)}{n} dx = x \frac{\sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2} + C \end{aligned}$$

Dus

$$\int_0^{\delta} \cos(nx) dx = \frac{1}{n} \sin(n\delta), \quad \int_0^{\delta} x \cos(nx) dx = \delta \frac{\sin(n\delta)}{n} + \frac{\cos(n\delta) - 1}{n^2}$$

en

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} \sin(n\delta) - \frac{1}{\delta} \left(\delta \frac{\sin(n\delta)}{n} + \frac{\cos(n\delta) - 1}{n^2} \right) \right) = \frac{2(1 - \cos(n\delta))}{\pi \delta n^2}.$$

Conclusie:

$$f(x) = \frac{\delta}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - \cos(n\delta))}{\pi \delta n^2} \cos(nx)$$

precies als gewensd. Dat de reeks overal naar $f(x)$ convergeert volgt uit het feit dat f continu is en overal van links en rechts differentieerbaar is.

Oplossing 2 Gezien

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(x) e^{-i2\pi nx} dx,$$

geldt

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(n) - \widehat{f}_k(n)| &= \left| \int_0^1 (f(x) - f_k(x)) e^{-i2\pi nx} dx \right| \leq \int_0^1 |(f(x) - f_k(x)) e^{-i2\pi nx}| dx \\ &= \int_0^1 |f(x) - f_k(x)| dx \end{aligned}$$

Het rechterlid is onafhankelijk en gaat, per aanname, naar nul als $k \rightarrow \infty$. Hiermee volgt de bewering rechtstreeks uit bovenstande ongelijkheid.

Oplossing 3 (a) Gezien $f_0, f_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mogen we hopen dat er een oplossing u is met $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. (Er is in feite een stelling die juist dit zegt.) Zij $\widehat{u}(\xi, y)$ de Fourier getransformeerde van u t.o.v. x . Dus

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\xi, y) e^{i2\pi x \xi} d\xi.$$

Gezien $\widehat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ mogen wij onder het integraalteken differentieren en krijgen

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \widehat{u}(\xi, y) e^{i2\pi x \xi} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-4\pi^2 \xi^2 \widehat{u}(\xi, y) + \frac{\partial^2 \widehat{u}(\xi, y)}{\partial y^2} \right) e^{i2\pi x \xi} d\xi. \end{aligned}$$

Dit moet nul zijn voor alle $(x, y) \in \Omega$. Voor vast y betekent dit dat de Fourier getransformeerde van de functie tussen haakjes identiek nul is, maar dit impliceert dat $(\cdots)$ zelf nul is. Dus

$$-4\pi^2 \xi^2 \widehat{u}(\xi, y) + \frac{\partial^2 \widehat{u}(\xi, y)}{\partial y^2} = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, y \in (0, 1).$$

Voor vast y is dit een GDV voor de functie $\xi \mapsto \widehat{u}(\xi, y)$. De algemene oplossing van $u''(x) = c^2 u(x)$ is $u = Ae^{cx} + Be^{-cx}$. Dus

$$\widehat{u}(\xi, y) = A(\xi)e^{2\pi \xi y} + B(\xi)e^{-2\pi \xi y}, \quad (1)$$

waar $A(\xi), B(\xi)$ (op dit moment nog) willekeurige functies in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ zijn. Hiermee volgt dat

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\xi, 0) e^{i2\pi x \xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (A(\xi) + B(\xi)) e^{i2\pi x \xi} d\xi \quad (2)$$

$$u(x, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\xi, 1) e^{i2\pi x \xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (A(\xi)e^{2\pi \xi} + B(\xi)e^{-2\pi \xi}) e^{i2\pi x \xi} d\xi \quad (3)$$

Onze randvoorwaarden $u(x, 0) = f_0(x)$ en $u(x, 1) = f_1(x)$ zijn equivalent aan

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_0(\xi) e^{i2\pi x \xi} d\xi \quad (4)$$

$$u(x, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_1(\xi) e^{i2\pi x \xi} d\xi \quad (5)$$

Als we (2) met (4) en (3) met (5) vergelijken zien we dat A, B aan

$$\begin{aligned} A(\xi) + B(\xi) &= \widehat{f}_0(\xi), \\ A(\xi)e^{2\pi \xi} + B(\xi)e^{-2\pi \xi} &= \widehat{f}_1(\xi) \end{aligned}$$

moeten voldoen, ofwel aan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{2\pi \xi} & e^{-2\pi \xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(\xi) \\ B(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{f}_0(\xi) \\ \widehat{f}_1(\xi) \end{pmatrix}.$$

We gebruiken

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

en krijgen

$$\begin{pmatrix} A(\xi) \\ B(\xi) \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{-2\pi\xi} - e^{2\pi\xi}} \begin{pmatrix} e^{-2\pi\xi} & -1 \\ -e^{2\pi\xi} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{f}_0(\xi) \\ \widehat{f}_1(\xi) \end{pmatrix}.$$

Dit is equivalent aan

$$\begin{aligned} A(\xi) &= \frac{-e^{-2\pi\xi}\widehat{f}_0(\xi) + \widehat{f}_1(\xi)}{2 \sinh 2\pi\xi} \\ B(\xi) &= \frac{e^{2\pi\xi}\widehat{f}_0(\xi) - \widehat{f}_1(\xi)}{2 \sinh 2\pi\xi} \end{aligned}$$

Door dit in (1) in te zetten krijgen we

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\xi, y) &= \frac{-e^{-2\pi\xi}\widehat{f}_0(\xi) + \widehat{f}_1(\xi)}{2 \sinh 2\pi\xi} e^{2\pi\xi y} + \frac{e^{2\pi\xi}\widehat{f}_0(\xi) - \widehat{f}_1(\xi)}{2 \sinh 2\pi\xi} e^{-2\pi\xi y} \\ &= \frac{\widehat{f}_0(\xi)(-e^{2\pi\xi(y-1)} + e^{2\pi\xi(1-y)}) + \widehat{f}_1(\xi)(e^{2\pi\xi y} - e^{-2\pi\xi y})}{2 \sinh 2\pi\xi} \\ &= \frac{\widehat{f}_0(\xi) \sinh(2\pi\xi(1-y)) + \widehat{f}_1(\xi) \sinh(2\pi\xi y)}{\sinh 2\pi\xi} \end{aligned} \tag{6}$$

zoals beweerd.

(b) Met

$$\widehat{\phi}_a(\xi) = \frac{\sinh 2\pi a \xi}{\sinh 2\pi\xi}$$

kunnen we (6) op volgende manier herschrijven:

$$\widehat{u}(\xi, y) = \widehat{f}_0(\xi) \widehat{\phi}_{1-y}(\xi) + \widehat{f}_1(\xi) \widehat{\phi}_y(\xi).$$

We weten dat uit $\widehat{f}(\xi) = \widehat{a}(\xi)\widehat{b}(\xi)$ volgt $f = a * b$ waar

$$(a * b)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(x-t)b(t)dt.$$

Als we nu de informatie gebruiken dat $\widehat{\phi}_a$ de Fourier getransformeerde van

$$\phi_a(x) = \frac{\sin \pi a}{2} \cdot \frac{1}{\cosh \pi x + \cos \pi a}$$

is, kunnen we concluderen dat

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (f_0 * \phi_{1-y})(x) + (f_1 * \phi_y)(x) \\ &= \frac{\sin \pi(1-y)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(x-t) \frac{1}{\cosh \pi t + \cos \pi(1-y)} dt \\ &\quad + \frac{\sin \pi y}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-t) \frac{1}{\cosh \pi t + \cos \pi y} dt \end{aligned} \tag{7}$$

Als we nu nog gebruiken dat $\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\cos(x + \pi) = -\cos x$ om te zien dat

$$\begin{aligned}\sin \pi(1 - y) &= \sin(\pi - y\pi) = -\sin(-y\pi) = \sin(y\pi), \\ \cos \pi(1 - y) &= \cos(\pi - y\pi) = -\cos(-y\pi) = -\cos(y\pi)\end{aligned}$$

zodat de integraal (7) met f_0 gelijk is aan

$$\frac{\sin \pi y}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(x - t) \frac{1}{\cosh \pi t - \cos \pi y} dt,$$

zijn we klaar.

Oplossing 4 (a) Zij $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{T}$ een character. Dan geldt $z := \phi(1) \in \mathbb{T}$. Omdat ϕ een homomorphisme van de additive group $\mathbb{Z}$ naar de multiplicative group $\mathbb{T}$ is geldt $\phi(n) = \phi(1)^n = z^n$. Als we nog opmerken dat de afbeelding $x \rightarrow e^{ix}, [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{T}$ een bijectie is zijn we klaar.

(b) We definiëren weer $z = \phi(1) \in \mathbb{T}$ en hebben $\phi(n) = \phi(1)^n = z^n$. In $\mathbb{Z}_N$ geldt (met additive notatie) $Nx = 0$ voor alle $x \in \mathbb{Z}_N$. Daarom geldt $\phi(x)^N = \phi(Nx) = \phi(0) = 1$ voor alle $x \in \mathbb{Z}_N$. Daarom moet z een N-de eenheidswortel zijn, die we kunnen schrijven als

$$z = e^{\frac{i2\pi m}{N}}$$

met een uniek $m \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$.

(c)

(d)