

# Tentamen Inleiding Fouriertheorie, Voorjaar 2008

06.04.2009

## Toelichting:

- Je mag geen hulpmiddelen (zoals aantekeningen, rekenmachine etc.) gebruiken, behalve het boek van Stein/Shakarchi: Fourier analysis. (De twee analyse-boeken van Tao zijn ook toegestaan.)
- Als je stellingen uit Stein/Shakarchi gebruikt willen we volledige referenties zien, waar je ook duidelijk maakt dat aan de voorwaarden voldaan is.

**Opgave 1** (10 punten) De functie  $f(x)$  zij op het interval  $[0, \pi]$  gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xh}{p} & \text{als } 0 \leq x \leq p \\ \frac{h(\pi-x)}{\pi-p} & \text{als } p \leq x \leq \pi \end{cases}$$

waar  $p \in (0, \pi)$ . (i) (1 pt) Maak en (primitief) schets.

(ii) (7 pt voor de berekening van  $A_n$ , 2 pt voor bewijs van convergentie) Laat zien dat

$$\forall x \in [0, \pi]: f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx \quad \text{met} \quad A_m = \frac{2h \sin mp}{m^2 p(\pi - p)}.$$

(Inclusief bewijs van convergentie!)

**Opgave 2** (10 punten)

(i) (3 pt) Bewijs dat

$$f(x) = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} - \frac{2}{x}$$

continu is op  $[-\pi, \pi]$ .

(ii) (3 pt) Voor  $f \in C([-\pi, \pi])$ , concludeer uit het Lemma van Riemann-Lebesgue dat

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right] dx = 0.$$

(iii) (4 pt) Gebruik het feit  $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 2\pi$  ( $D_N$  de Dirichlet kern) om te bewijzen dat

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

**Zie vervolg op achterkant!!**

**Opgave 3** (8 punten) Zij  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  continu en van moderate daling (dus  $|f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2}$ ).

(i) (3 pt) Bewijs dat de Fourier getransformeerde  $\widehat{f}$  continu is.

(ii) (2 pt) Laat zien dat

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - f(x - 1/(2\xi))] e^{-2\pi i x \xi} dx. \quad (1)$$

(iii) (3 pt) Bewijs dat  $\widehat{f}(\xi) \rightarrow 0$  als  $|\xi| \rightarrow \infty$ . (Dit is de stelling van Riemann-Lebesgue voor de Fourier transformatie.)

**Opgave 4** (12 punten) We bekijken de PDV

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ax \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2)$$

op  $0 < x < \infty$  en zoeken een oplossing  $u(x, t)$  voor  $t \geq 0$  met  $u(x, 0) = f(x)$ .

(i) (3 pt) Substitueer  $x = e^{-y}$  met  $-\infty < y < \infty$ . Definieer

$$U(y, t) = u(e^{-y}, t), \quad F(y) = f(e^{-y})$$

en laat zien dat (2) in

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (1-a) \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (3)$$

overgaat. (Voor  $a = 1$  is dit gewoon de warmtevergelijking.)

(ii) (6 pt) Los het beginwaardeprobleem voor (3) op. (Via een vergelijking voor  $\widehat{U}(\xi, t)$ .)

(iii) (3 pt) Laat zien dat de oplossing van het oorspronkelijke probleem gegeven is door

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_0^\infty e^{-(\ln(v/x) + t(1-a))^2 / (4t)} f(v) \frac{dv}{v}.$$

# Oplossingen

**Oplossing 1** (i) (Er zijn twee opties: Of we bekijken  $f$  als periodieke functie op  $[0, \pi]$  en zoeken een ontwikkeling in termen van functies  $e^{2inx}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , of we zetten  $f$  naar  $[-\pi, 0]$  voort en zoeken een ontwikkeling in termen van functies  $e^{inx}$ . Uiteindelijk maakt het natuurlijk niet uit, maar gezien de aangegeven reeks een ontwikkeling in  $\sin nx$  is lijkt de tweede optie natuurlijker.)

De functie  $f$  is op  $[0, \pi]$  gegeven. Voor  $x \in [-\pi, 0]$  definiëren we  $f(x) = -f(-x)$ , dus we maken  $f$  een oneven functie. Voor een oneven functie zijn er geen cosinus termen en geen constante term in de (reële) Fourier ontwikkeling, dus

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx$$

met

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Dus

$$A_n = \frac{2h}{p\pi} \int_0^p x \sin(nx) dx + \frac{2h}{(\pi-p)\pi} \int_p^{\pi} (\pi-x) \sin(nx) dx.$$

Een primitive voor  $\sin(nx)$  is natuurlijk  $-\cos(nx)/n$ , en partiële integratie levert

$$\begin{aligned} \int_a^b x \sin(nx) dx &= - \int_a^b \frac{-1}{n} \cos(nx) dx + [x \frac{-1}{n} \cos(nx)]_a^b \\ &= [\frac{1}{n^2} \sin(nx) + \frac{-x}{n} \cos(nx)]_a^b \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2h}{p\pi} \left[ \frac{1}{n^2} \sin(nx) - \frac{x}{n} \cos(nx) \right]_0^p + \frac{2h}{(\pi-p)\pi} \left\{ \pi \left[ \frac{-1}{n} \cos(nx) \right]_p^{\pi} - \left[ \frac{1}{n^2} \sin(nx) - \frac{x}{n} \cos(nx) \right]_p^{\pi} \right\} \\ &= \frac{2h}{p\pi} \left( \frac{1}{n^2} \sin(np) - \frac{p}{n} \cos(np) \right) \\ &\quad + \frac{2h}{(\pi-p)\pi} \left\{ \frac{-\pi}{n} (\cos(n\pi) - \cos(np)) + \frac{1}{n^2} \sin(np) + \frac{\pi}{n} \cos(n\pi) - \frac{p}{n} \cos(np) \right\} \\ &= \frac{2h}{n^2\pi} \sin(np) \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{\pi-p} \right) \\ &= \frac{2h \sin(np)}{n^2 p (\pi-p)} \end{aligned}$$

(De cosinus-termen vallen tegen elkaar weg.)

(ii) De functie  $f$  is continu en de Fouriercoëfficiënten voldoen aan  $|c_n(f)| \leq C/n^2$  voor  $n \neq 0$ . Dus  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$  en Corollary 2.3 op blz. 41 van Stein/Shakarchi impliceert dat de Fourierreeks overal naar  $f(x)$  convergeert.

**Oplossing 2** (i) Dat  $f$  continu is in de punten  $x \neq 0$  is duidelijk. Als we kunnen aantonen dat  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = C \in \mathbb{C}$ , dan krijgen we een continue functie op  $[-\pi, \pi]$  door de definiëren  $f(0) = C$ . Voor het bekijken van de limiet  $x \rightarrow 0$  zijn er verschillende mogelijkheden; hier zijn er twee:

(A) De sinus is door de overal convergente reeks  $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \dots$  gegeven. Voor  $x \neq 0$  geldt hiermee

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{x - (x - x^3/3! + x^5/5! - \dots)}{x(x - x^3/3! + x^5/5! - \dots)} = \frac{x^3(1/3! - x^2/5! + \dots)}{x^2(1 - x^2/3! + x^4/5! - \dots)}.$$

Voor  $x \rightarrow 0$  gedragt zich dit als  $x/6$  en gaat naar nul. De functie laat zich dus continu naar 0 voortzetten.

(B) Regel van l'Hôpital: De teller en noemer in  $f(x) = \frac{x - \sin x}{x \sin x}$  zijn gladde functies die voor  $x \rightarrow 0$  naar nul gaan. Daarom

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \rightarrow \frac{0}{0}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} \rightarrow \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

(ii) Uit

$$\sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right] = \frac{e^{ix(N+\frac{1}{2})} - e^{-ix(N+\frac{1}{2})}}{2i}$$

volgt

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right] dx &= \frac{1}{2i} \left( \int_{-\pi}^{\pi} (f(x)e^{ix/2})e^{iNx} dx - \int_{-\pi}^{\pi} (f(x)e^{-ix/2})e^{-iNx} dx \right) \\ &= -i\pi c_{-N}(f_1) + i\pi c_N(f_2) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

met Riemann-Lebesgue, want de functies  $f_1(x) = f(x)e^{ix/2}$  en  $f_2(x) = f(x)e^{-ix/2}$  zijn continu.

(iii) Zoals in (i) bewezen, is de functie  $f(x) = 1/\sin(x/2) - 2/x$  continu op  $[-\pi, \pi]$ . Met (ii) geldt dus

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)x \left( \frac{1}{\sin(x/2)} - \frac{2}{x} \right) dx = 0.$$

We weten

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 2\pi.$$

Dus

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2 \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)x}{x} dx = 2\pi.$$

Gezien de integrand even is volgt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Maar het linkerlid is gelijk aan

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

en we zijn klaar.

**Oplossing 3** (i) We berekenen

$$\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(e^{-2\pi i(\xi+h)x} - e^{-2\pi i\xi x})dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(e^{-2\pi ihx} - 1)e^{-2\pi i\xi x}dx.$$

Voor  $h \rightarrow 0$  gaat de integrand overal puntsgewijs naar nul, en de “dominated convergence” stelling van Lebesgue (in verband met  $\int |f(x)|dx < \infty$ ) geeft  $\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi) \rightarrow 0$ .

(ii) Per definitie geldt

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx. \quad (4)$$

Als we hierin substitueren  $x = y - \frac{1}{2\xi}$  krijgen we

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y - 1/(2\xi))e^{-2\pi i(y-1/(2\xi))\xi}dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y - 1/(2\xi))e^{-2\pi iy\xi - i\pi}dy \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(y - 1/(2\xi))e^{-2\pi iy\xi}dy. \end{aligned} \quad (5)$$

(Hier hebben we  $e^{i\pi} = -1$  gebruikt.) Als we (5) bij (4) optellen en door 2 delen krijgen we de gewenste formule for  $\widehat{f}(\xi)$ .

(iii) Uit (ii) en de continuïteit van  $f$  volgt dat de integrand in (1) puntsgewijs naar 0 gaat als  $|\xi| \rightarrow \infty$ . Dat  $\widehat{f}(\xi) \rightarrow 0$  volgt dan weer met de dominated convergence stelling.

**Oplossing 4** (i) Met  $x = e^{-y}$  hebben we  $y = -\ln x$  en dus

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x} \frac{\partial U}{\partial y} = -e^y \frac{\partial U}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^y \frac{\partial}{\partial y} \left( -e^y \frac{\partial U}{\partial y} \right) = e^{2y} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

Dus

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ax \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial y} - a \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (1-a) \frac{\partial U}{\partial y},$$

en we hebben (3).

(ii) We schrijven

$$U(y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{U}(\xi, t) e^{2\pi i\xi y} d\xi.$$

Dan

$$\frac{\partial U}{\partial y}(y, t) = 2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{U}(\xi, t) e^{2\pi i\xi y} d\xi \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(y, t) = -4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{U}(\xi, t) e^{2\pi i\xi y} d\xi$$

Als we dit in (3) inzetten krijgen we

$$\int_{-\infty}^{\infty} [-4\pi^2 \xi^2 + (1-a)2\pi i\xi] \widehat{U}(\xi, t) e^{2\pi i\xi y} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \widehat{U}}{\partial t}(\xi, t) e^{2\pi i\xi y} d\xi.$$

Dit geldt voor alle  $y \in \mathbb{R}$  d.e.s.d.a

$$[-4\pi^2 \xi^2 + (1-a)2\pi i\xi] \widehat{U}(\xi, t) = \frac{\partial \widehat{U}}{\partial t}(\xi, t) \quad (6)$$

voor alle  $\xi \in \mathbb{R}$ . De beginvoorwaarde  $U(y, 0) = F(y)$  leidt op  $\widehat{U}(\xi, 0) = \widehat{F}(\xi)$ . De unieke oplossing van (6) met deze voorwaarde is

$$\widehat{U}(\xi, t) = \widehat{F}(\xi) e^{t[-4\pi^2\xi^2 + (1-a)2\pi i\xi]}.$$

Met  $\widehat{a * b} = \widehat{a}\widehat{b}$  volgt hieruit dat

$$U(y, t) = (F * K_t)(y) \quad \text{waar} \quad \widehat{K}_t(\xi) = e^{t[-4\pi^2\xi^2 + (1-a)2\pi i\xi]}.$$

Dus

$$K_t(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t[-4\pi^2\xi^2 + (1-a)2\pi i\xi]} e^{2\pi i\xi y} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t\pi^2\xi^2} e^{2\pi i\xi(y+t(1-a))} d\xi.$$

Nu gebruiken we

$$F_\delta(x) = e^{-\pi\delta x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{F}_\delta(\xi) = \delta^{-1/2} e^{-\pi\xi^2/\delta}$$

en concluderen

$$K_t(y) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-\pi(y+t(1-a))^2/(4\pi t)}.$$

Dus

$$U(y, t) = (4\pi t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{-(y-w+t(1-a))^2/(4t)} dw. \quad (7)$$

(iii) Met de substituties  $w = -\ln v \Leftrightarrow v = e^{-w}$ ,  $y = -\ln x \Leftrightarrow x = e^{-y}$  in (7) krijgen we

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (4\pi t)^{-1/2} \int_0^\infty f(v) e^{-(-\ln x + \ln v + t(1-a))^2/(4t)} \frac{dv}{v} \\ &= (4\pi t)^{-1/2} \int_0^\infty f(v) e^{-(\ln(v/x) + t(1-a))^2/(4t)} \frac{dv}{v}, \end{aligned}$$

zoals gewensd.