

Opgave 1

DEFINITIE 1 Een functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heet periodiek met periode $b \neq 0$ als

$$f(x + b) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bewijs dat een periodieke functie waarvoor $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ bestaat constant is.

Opgave 2

DEFINITIE 2 Een functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heet Hölder-continu met exponent $\alpha > 0$ als er een $C > 0$ is zodat

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bewijs de volgende

STELLING 3 Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder continu met exponent $\alpha > 0$. Dan

(a) f is continu.

(b) Als $\alpha > 1$ dan is f constant.

Wat kun je over f' zeggen als $\alpha = 1$? (In dit geval heet f Lipschitz-continu.)

AANWIJZING 4 Voor (b) gebruik de definitie van $f'(x)$.

Opgave 3

DEFINITIE 5 Een functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heet convex als

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \quad \forall x, y \in [a, b], \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Bewijs met inductie over n dat f aan de ongelijkheid van Jensen voldoet:

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n) \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_1, \dots, x_n \in [a, b], \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1], \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1.$$

(Voor $n = 1$ is deze ongelijkheid triviaal, en voor $n = 2$ is dit de definitie van convexiteit.)

Opgave 4

Bestudeer de functies

(a) $f(x) = \arccos\left(\frac{3}{2} - \sin x\right),$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x(x+3)^2}$

en construeer hun grafen.

Opgave 5

Bewijs de volgende

STELLING 6 (a) Zij $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ overal differentieerbaar. Dan is er voor elk λ strikt tussen $f'(a)$ en $f'(b)$ een $c \in (a, b)$ zodat $f'(c) = \lambda$.

(b) Alle singulariteiten van f' in (a, b) zijn van tweede type.

Zie aanwijzing op achterkant!!

AANWIJZING 7 Als f' op $[a, b]$ continu is, volgt (a) uit de tussenwaardstelling voor $g = f'$. Maar we veronderstellen niet dat f' continu is, een daarom hebben we een ander bewijs nodig!

(a) Je mag veronderstellen dat $f'(a) < \lambda < f'(b)$. (Voor $f'(b) < \lambda < f'(a)$ werkt het bewijs analoog.)

(a1) Bewijs dat de hulpfunctie $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \lambda x$, op $[a, b]$ een absoluut minimum c heeft.

(a2) Bereken $g'(a)$ en $g'(b)$ en gebruik dit om te bewijzen dat $a \neq c \neq b$.

(a3) Gebruik het Lemma van Fermat op geschikte manier om te bewijzen dat $f'(c) = \lambda$.

(b) Veronderstel dat f' in $c \in (a, b)$ een singulariteit van eerste type heeft, dus de limieten $\lim_{h \rightarrow +0} f'(c - h)$ en $\lim_{h \rightarrow +0} f'(c + h)$ bestaan, maar tenminste een ervan is ongelijk aan $f'(c)$. Nu gebruik (a) om te zien dat dit op een tegenspraak leidt.