Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Geometrie“

Blatt 1*, 13.10.2014

Aufgabe 1.1. Sei (E, G) eine Ebene, also eine Menge E zusammen mit einer Menge von Teilmengen G, so dass die Inzidenzaxiome (A1) bis (A4) erfüllt sind.

Sei $E' \subset E$ eine Teilmenge, die nicht in einer Gerade aus G enthalten ist, und sei

$$G' = \{g \cap E' \mid g \in G \text{ und } g \cap E' \text{ hat mindestens zwei Punkte}\}.$$

Zeigen Sie, dass dann auch (E', G') die Indzidenzaxiome erfüllt.

Definition. Eine Ebene (E, G) heißt *affin*, wenn zusätzlich zu den Inzidenzaxiomen (A1) bis (A4) das folgende Parallelenaxiom (P) erfüllt ist:

(P) Für jedes $P \in E$ und jedes $g \in G$ gibt es genau eine Gerade $h \in G$, die P enthält und parallel zu g ist.

Aufgabe 1.2. Zeigen Sie, dass in einer affinen Ebene (E, G) „parallel“ eine Äquivalenzrelation ist, also die folgenden Aussagen gelten:

(i) Für jede Gerade $g \in G$ gilt $g \parallel g$.
(ii) Für zwei Geraden $g, h \in G$ mit $g \parallel h$ gilt $h \parallel g$.
(iii) Für drei Geraden $g, h, k \in G$ mit $g \parallel h$ und $h \parallel k$ gilt $g \parallel k$

Aufgabe 1.3. Zeigen Sie: Die in der Vorlesung definierte affine Ebene $\mathbb{A}^2(K)$ über einem Körper K ist eine affine Ebene im Sinne der obigen Definition.

Aufgabe 1.4. Sei (E, G) eine affine Ebene, deren Punktemenge E endlich ist. Zeigen Sie, dass jede Gerade die gleiche Anzahl von Punkten hat.

Aufgabe 1.5. Sei (E, G) eine affine Ebene, deren Punktemenge E endlich ist. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Punkte eine Quadratzahl ist.

(Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1.4.)

*Abgabe: Montag 20.10.2014 vor der Vorlesung.

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Geometrie“

Blatt 2*, 20.10.2014

Aufgabe 2.1. Bestimmen Sie, wieviele Isomorphieklassen von Ebenen mit 5 Punkten es gibt. Geben Sie zu jeder dieser Isomorphieklassen eine solche Ebene an.

Definition. Eine Ebene (E, G) heißt *projektiv*, wenn zusätzlich zu den Inzidenzaxiomen (A1) bis (A4) die folgenden beiden Axiome gelten:

(A3*) Jede Gerade enthält mindestens 3 verschiedene Punkte.

(A5) Je zwei Geraden schneiden sich.

Aufgabe 2.2. Zeigen Sie: Es gibt eine projektive Ebene mit 7 Punkten, und jede projektive Ebene hat mindestens 7 verschiedene Punkte.

Aufgabe 2.3. Sei (E, G) eine projektive Ebene mit endlich vielen Punkten. Zeigen Sie, dass alle Geraden gleichviele Punkte haben.

Aufgabe 2.4. Sei (E, G) eine projektive Ebene mit endlich vielen Punkten. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Geraden mit der Anzahl der Punkte übereinstimmt.

(Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 2.3.)

Aufgabe 2.5. Sei (E, G) eine affine Ebene im Sinne des 1. Übungsblattes. Zu einer Gerade $g \in G$ bezeichnen wir mit $\bar{g}$ die Menge der zu g parallelen Geraden, d.h. $\bar{g} = \{h \in G \mid h \parallel g\}$. Weiterhin bezeichne $U = \{\bar{g} \mid g \in G\}$ die Menge der Äquivalenzklassen von parallelen Geraden aus G. (Es repräsentieren also zwei parallele Geraden g und h aus G das gleiche Element in U, und zwei nicht parallele Geraden repräsentieren verschiedene Elemente.)

Sei nun $\overline{E} = E \,\dot{\cup}\, U$ die disjunkte Vereinigung von E und U, d.h. $\overline{E}$ entsteht aus E, indem man die Elemente $\bar{g} \in U$ als neue Punkte hinzumimmt. Weiterhin sei

$$\overline{G} = \{T \subset \overline{E} \mid T = U \text{ oder } T = g \cup \{\bar{g}\} \text{ für ein } g \in G\}.$$

Zeigen Sie, dass dann $(\overline{E}, \overline{G})$ eine projektive Ebene ist. (Man nennt $(\overline{E}, \overline{G})$ den *projektiven Abschluß* von (E, G), der anschaulich gesprochen durch die Hinzunahme der *unendlich fernen* Gerade U entsteht.)

*Abgabe: Montag 27.10.2014 vor der Vorlesung.

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Geometrie“

Blatt 3*, 27.10.2014

Auf diesem Übungsblatt verwenden wir weiterhin die auf den ersten beiden Übungsblättern eingeführten Begriffe *affiner* und *projektiver* Ebenen.

Aufgabe 3.1. Sei K ein Körper. Wir nennen zwei Vektoren $(x_0, x_1, x_2), (y_0, y_1, y_2) \in K^3 \setminus \{0\}$ äquivalent, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit $(x_0, x_1, x_2) = \lambda(y_0, y_1, y_2)$ gibt. Dies ist offenbar eine Äquivalenzrelation. Wir schreiben $[x_0, x_1, x_2]$ für die Äquivalenzklasse von (x_0, x_1, x_2) und E für die Menge der Äquivalenzklassen. Eine Teilmenge g von E heißt eine Gerade, wenn es $(a, b, c) \in K^3 \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft

$$g = \{[x_0, x_1, x_2] \in E \mid ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0\}$$

gibt. Wir schreiben G für die Menge der Geraden in E.

Zeigen Sie, dass (E, G) eine projektive Ebene ist.

Aufgabe 3.2. Sei (E, G) eine projektive Ebene und $h \in G$ eine Gerade darin. Es sei

$$E' = E \setminus h \qquad \text{und} \qquad G' = \{g \cap E' \mid g \in G \setminus \{h\}\}.$$

Zeigen Sie, dass dann (E', G') eine affine Ebene ist.

Definition. Sei (E, G) eine Ebene mit Strecken. Ein *Polygon* ist eine Teilmenge von E von der Form

$$\overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \overline{A_{n-1}A_n},$$

wobei $A_1, \dots, A_n$ Punkte von E mit der Eigenschaft $A_i \neq A_{i+1}$ für alle $1 \leq i \leq n-1$ sind. Der Punkt A_1 heißt *Anfangspunkt* des Polygons, und A_n *Endpunkt*. Die Strecken $\overline{A_{i-1}A_i}$ heißen die *Kanten* des Polygons, und die Punkte A_{i-1} und A_i heißen die Eckpunkte dieser Kante. Das Polygon heißt *geschlossen*, wenn $A_1 = A_n$ gilt. Das Polygon heißt *doppelpunktfrei*, wenn jeder innere Punkt einer Kante in keiner anderen Kante enthalten ist, und wenn jeder Eckpunkt einer Kante höchstens in einer anderen Kante enthalten ist.

Aufgabe 3.3. Sei (E, G) eine Ebene mit Strecken und seien $A_1, \dots, A_n$ Punkte von E, die ein geschlossenes und doppelpunktfreies Polygon aufspannen. Sei g eine Gerade, die das Polygon schneidet und dabei keinen Eckpunkt einer Kante enthält.

Zeigen Sie, dass die Anzahl der Schnittpunkte der Gerade mit dem Polygon eine gerade Zahl ist. (Hinweis: Nutzen Sie, dass die in der Vorlesung definierte Relation $\sim_g$ eine Äquivalenzrelation mit genau 2 Äquivalenzklassen ist.)

Aufgabe 3.4. Sei (E, G) eine Ebene mit Strecken, seien A_1, A_2, A_3 Punkte von E, die nicht auf einer Gerade liegen, und sei $\delta = \overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \overline{A_3A_1}$ das von diesen Punkten aufgespannte Polygon. Wir definieren nun eine Relation $\sim_\delta$ auf der Menge $E \setminus \delta$ durch die folgende Vorschrift: Für Punkte $A, B \in E \setminus \delta$ gelte $A \sim_\delta B$ genau dann, wenn es ein Polygon mit Anfangspunkt A und Endpunkt B gibt, dessen Schnitt mit δ leer ist.

Zeigen Sie, dass $\sim_\delta$ eine Äquivalenzrelation mit genau zwei Äquivalenzklassen ist.

*Abgabe: Montag 03.11.2014 vor der Vorlesung.

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Geometrie“

Blatt 4*, 03.11.2014

Aufgabe 4.1. Sei (E, G) eine Ebene mit Strecken, sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, und seien $A_1, \dots, A_n$ Punkte von E, die alle auf einer Gerade g liegen.

Zeigen Sie, dass es eine bijektive Abbildung $\sigma \colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ gibt, so dass für alle $1 \leq i < j < k \leq n$ die Beziehung $A_{\sigma(j)} \in \overline{A_{\sigma(i)} A_{\sigma(k)}}$ gilt. (Mit anderen Worten: Man kann die Punkte so umnummerieren, dass sie geordnet sind.)

Aufgabe 4.2. Sei (E, G) eine Ebene mit Strecken, sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, und seien $A_1, \dots, A_n$ Punkte von E.

Zeigen Sie, dass es zwei Indizes $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ gibt, so dass eine der beiden durch die Gerade $g(A_i, A_j)$ bestimmten Halbebenen keinen der Punkte $A_1, \dots, A_n$ enthält. (Hinweis: Eine mögliche Beweisstrategie ist, Aufgabe 4.1 zu benutzen.)

Aufgabe 4.3. Sei (E, G) eine Ebene mit Strecken und seien A, B zwei verschiedene Punkte, die auf einer Gerade g liegen. Sei s der von A ausgehende Strahl auf g, der B enthält, und sei t der von B ausgehende Strahl auf g, der A enthält.

Zeigen Sie, dass $s \cup t = g$ und $s \cap t = \{P \in E \mid P \text{ ist innerer Punkt von } \overline{AB}\}$ gilt.

Definition. Sei (E, G) eine Ebene mit Strecken. Eine Menge von Punkten $M \subseteq E$ heißt *konvex*, wenn $\overline{AB} \subseteq M$ für alle Punkte A und B von M gilt.

Aufgabe 4.4. Sei (E, G) eine Ebene mit Strecken. Zeigen Sie:

(i) Geraden, Strecken und Strahlen sind konvex.

(ii) Seien $g_1, \dots, g_n$ Geraden und seien $H_1, \dots, H_n$ Halbebenen zu diesen Geraden. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt $H_1 \cap \cdots \cap H_n$ konvex ist.

*Abgabe: Montag 10.11.2014 vor der Vorlesung.

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Geometrie“

Blatt 5*, 10.11.2014

In allen Aufgaben dieses Übungsblattes sei (E, G) eine Ebene mit Strecken und Bewegungen.

Aufgabe 5.1. Zu einem Punkt $P \in E$ bezeichen D_P Gruppe der Drehungen um P. Seien nun $A, B \in E$ zwei Punkte und σ_g die Spielung mit $\sigma_g(A) = B$.

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$D_A \to D_B, \qquad \delta \mapsto \sigma_g \circ \delta \circ \sigma_g$$

wohldefiniert und ein Isomorphismus von Gruppen ist.

Aufgabe 5.2. Zeigen Sie, dass eine Komposition von zwei Spiegelungen keine Spiegelung ist.

Aufgabe 5.3. Zeigen Sie die beiden folgenden Aussagen:

(i) Ist β eine Bewegung und gibt es Punkte P, Q in E mit der Eigenschaft $\beta(P) = P$ und $\beta(Q) = Q$, so ist β eine Spiegelung oder die Identität.

(ii) Sind g, g' zwei nicht-parallele Geraden und ist h eine Gerade mit $\sigma_h(g) = g'$, so enthält h den Schnittpunkt von g und g'.

Aufgabe 5.4. Seien A, B, C drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Zeigen Sie, dass sich die drei Winkelhalbierenden g_A, g_B, g_C des von A, B, C aufgespannten Dreiecks in einem Punkt schneiden.

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass sich g_A und g_B schneiden. Sei h das Lot dieses Schnittpunkts auf die Gerade $g(A, B)$. Untersuchen Sie die Bewegung $\sigma_{g_A} \circ \sigma_h \circ \sigma_{g_B}$ mit Hilfe von Aufgabe 5.3(ii).)

*Abgabe: Montag 17.11.2014 vor der Vorlesung.

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Geometrie“

Blatt 6*, 17.11.2014

Aufgabe 6.1. Sei E eine Ebene mit Strecken und Bewegungen. Seien g_1 und g_2 orthogonale Geraden mit Schnittpunkt P und $\delta_P = \sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2}$ die durch diese Geraden bestimmte Drehung um P. Zu $Q \in E \setminus \{P\}$ sei $h_Q = g(P,Q)$ die Gerade durch P und Q und s_Q der Strahl aus P auf h_Q, der Q nicht enthält. Sei $\pi_P(Q)$ der eindeutig bestimmte Punkt auf s_Q mit der Eigenschaft $\overline{P\pi_P(Q)} \equiv \overline{PQ}$.

Zeigen Sie, dass $\delta_P(Q) = \pi_P(Q)$ gilt. (Man nennt die durch zwei orthogonale Geraden bestimmte Drehung deswegen *Punktspiegelung*. Ein möglicher Beweisansatz ist, eine geometrische Interpretation der Gerade h'_Q durch P mit der Eigenschaft $\sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2} \circ \sigma_{h_Q} = \sigma_{h'_Q}$ zu finden.)

Aufgabe 6.2. Sei E eine Ebene mit Strecken und Bewegungen und sei β eine Bewegung mit der Eigenschaft $\beta^2 = \mathrm{id}$. Zeigen Sie:

(i) Für jeden Punkt P von E ist der Mittelpunkt M von $\overline{P\beta(P)}$ ein Fixpunkt von β, d.h. es gilt $\beta(M) = M$.

(ii) Die Bewegung β ist entweder die Identität oder eine Spiegelung an einer Gerade oder eine Punktspiegelung im Sinne der letzten Aufgabe. (Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle “β hat genau einen Fixpunkt” und “β hat mehr als einen Fixpunkt”.)

Aufgabe 6.3. Sei E eine Ebene mit Strecken und Bewegungen. Es seien vier Punkte A, B, C, D gegeben, die ein doppelpunktfreies Polygon A, B, C, D, A aufspannen. Es gelte $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ und $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$.

Zeigen Sie, dass dann $g(A,B)$ und $g(C,D)$ parallel sind. Mit anderen Worten: Ein Viereck, in dem die gegenüberliegenden Seiten kongruent sind, ist ein Parallelogramm. (Hinweis: Benutzen Sie die Mittelpunkte der Seiten.)

Aufgabe 6.4. Sei $K \subset \mathbb{R}$ ein Teilkörper, sei $g = \{(x,y) \,|\, ax + by = c\}$ die durch $a, b, c \in K$ mit $(a,b) \neq (0,0)$ bestimmte Gerade in K^2, und sei

$$\sigma_g \colon K^2 \to K^2, \qquad (x,y) \longmapsto (x,y) \begin{pmatrix} \frac{-a^2+b^2}{a^2+b^2} & \frac{-2ab}{a^2+b^2} \\ \frac{-2ab}{a^2+b^2} & \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix} + \frac{2c}{a^2+b^2}(a,b)$$

die in der Vorlesung betrachtete Spiegelung an g. Zeigen Sie, dass für Punkte (x,y) auf g immer $\sigma_g(x,y) = (x,y)$ gilt.

*Abgabe: Montag 24.11.2014 vor der Vorlesung.

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Geometrie“

Blatt 7*, 24.11.2014

In allen Aufgaben dieses Übungsblattes sei (E, G) eine Ebene mit Strecken und Bewegungen.

Aufgabe 7.1. Zeigen Sie, dass es zu jeder Strecke $\overline{AB}$ in E ein gleichschenkliges Dreieck gibt, das $\overline{AB}$ als Grundseite hat.

Aufgabe 7.2. Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung des Kongruenzsatzes SSS: Zwei n-Ecke $(A_1, \ldots, A_n)$ und $(B_1, \ldots, B_n)$ sind genau dann kongruent, wenn für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ die Strecke $\overline{A_i A_j}$ kongruent zu $\overline{B_i B_j}$ ist.

(Hinweis: Benutzen Sie den Fall $n = 3$ aus der Vorlesung und die schon bekannte Tatsache, dass eine Bewegung durch das Bild von 3 Punkten in allgemeiner Lage bestimmt ist.)

Aufgabe 7.3. In der Ebene (E, G) gelte zusätzlich das Parallelenaxiom (P) von Blatt 1. Seien g_1 und g_2 zwei parallele Geraden und sei h eine Gerade, die zu g_1 orthogonal ist. Zeigen Sie, dass h dann auch zu g_2 orthogonal ist.

(Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1.2 und die Eindeutigkeit von Loten.)

Definition. Eine Bewegung τ heißt *Translation*, wenn
(i) $g \parallel \tau(g)$ für alle Geraden g gilt und
(ii) $\tau = \mathrm{id}$ gilt, falls es ein $P \in E$ mit $\tau(P) = P$ gibt.

Aufgabe 7.4. In der Ebene (E, G) gelte zusätzlich das Parallelenaxiom (P) von Blatt 1. Zeigen Sie:
(i) Ist τ eine Translation, so ist auch die inverse Abbildung τ^{-1} eine Translation.
(ii) Sind τ und τ' Translationen und gibt es einen Punkt P mit $\tau(P) = \tau'(P)$, so gilt $\tau = \tau'$.
(iii) Sind g_1 und g_2 zwei parallele Geraden, so ist $\sigma_{g_2} \circ \sigma_{g_1}$ eine Translation.
(Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 7.3 und die Eindeutigkeit von Mittelsenkrechten.)
(iv) Zu jeder Translation τ gibt es zwei parallele Geraden g_1 und g_2 mit $\tau = \sigma_{g_2} \circ \sigma_{g_1}$.

*Abgabe: Montag 01.12.2014 vor der Vorlesung.

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Geometrie“

Blatt 8*, 01.12.2014

In allen Aufgaben dieses Übungsblattes sei (E, G) eine Ebene mit Strecken und Bewegungen.

Aufgabe 8.1. Seien A, B, C, D Punkte in E, die ein doppelpunktfreies Polygon (A, B, C, D, A) aufspannen und für die $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$ gilt. Zeigen Sie, dass die Geraden $g(B, D)$ und $g(A, C)$ orthogonal sind.

(Mit anderen Worten: In einer Raute schneiden sich die Diagonalen orthogonal.)

Definition. Seien $O, A \in E$ zwei verschiedene Punkte. Der *Kreis* um O mit Radius $\overline{OA}$ ist die Menge der Punkte $K = \{B \in E \,|\, \overline{OB} \equiv \overline{OA}\}$ in E. Eine Gerade g heißt *Tangente* an K im Punkt B, wenn $K \cap g = \{B\}$ gilt, also die Gerade den Kreis in genau einem Punkt B schneidet.

Aufgabe 8.2. Sei K ein Kreis um O mit Radius $\overline{OA}$ und K' ein Kreis um O' mit Radius $\overline{O'A'}$. Es gelte $K = K'$, d. h. die Mengen der Punkte aus denen die Kreise bestehen stimmen überein. Zeigen Sie, dass dann auch $O = O'$ und $\overline{OA} \equiv \overline{O'A'}$ gilt.

(Hinweis: Nehmen Sie an, dass $O \neq O'$ gilt, betrachten Sie die Gerade $g = g(O, O')$ und vergleichen Sie die Abstände zwischen O, O' und den Schnittpunkten von K mit g.)

Aufgabe 8.3. Sei K ein Kreis um O mit Radius $\overline{OA}$. Zeigen Sie:

(i) Das Lot von A auf $g(O, A)$ ist eine Tangente an K im Punkt A.
(ii) Eine Tangente an K im Punkt B ist orthogonal zu $g(O, B)$.

Aufgabe 8.4. In (E, G) gelte zusätzlich das archimedische Axiom (D1). Wie in der Vorlesung schreiben wir S für die Menge der Kongruenzklassen von Strecken in (E, G). Es seien l_1, l_2 zwei injektive Monoidhomomorphismen $S \to \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, dass es ein $r \in R$ gibt, so dass $l_1(\{\overline{AB}\}) = r \cdot l_2(\{\overline{AB}\})$ für alle $A, B \in E$ gilt.

(Hinweis: Wählen Sie Punkte $E_0 \neq E_1$ in E und vergleichen Sie l_1 und l_2 jeweils mit der Längenfunktion, die man mit der Konstruktion aus der Vorlesung aus E_0 und E_1 bekommt.)

*Abgabe: Montag 08.12.2014 vor der Vorlesung.

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Geometrie“

Blatt 9*, 08.12.2014

In allen Aufgaben dieses Übungsblattes sei (E, G) eine Ebene mit Strecken und Bewegungen, in der zusätzlich das archimedische Axiom (D1) gilt. Es bezeichnen l und w Längen- und Winkelmaße mit den in der Vorlesung nachgewiesenen Eigenschaften.

Aufgabe 9.1. In (E, G) gelte zusätzlich das Parallelenaxiom (P).

Seien (A, B, C, D) Punkte in E, die ein Parallelogramm aufspannen, also die Eigenschaften $g(A, B) \parallel g(C, D)$ und $g(A, D) \parallel g(B, C)$ haben. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ und $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$.

(ii) Der Schnittpunkt von $g(A, C)$ und $g(B, D)$ ist der Mittelpunkt von $\overline{AC}$ und von $\overline{BD}$.

Aufgabe 9.2. Sei g eine Gerade, P ein Punkt aus $E \setminus g$ und h das Lot von P auf g mit Fußpunkt Q. Zeigen Sie:

(i) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $R \in g$ mit der Eigenschaft $w(\measuredangle PRQ) < \varepsilon$.

(ii) Wenn die Summe der Innenwinkel jedes Dreiecks in (E, G) die Summe von zwei rechten Winkeln ist, dann ist das Lot k von P auf h die einzige Parallele zu g durch P. (Hinweis: Nehmen Sie die Existenz einer weiteren Parallele zu g durch P an und benutzen Sie (i), um einen Widerspruch zu folgern.)

Definition. Eine *Ähnlichkeit* ist ein streckenerhaltender Automorphismus λ von (E, G), so dass $\alpha \equiv \lambda(\alpha)$ für alle Winkel α von (E, G) gilt.

Zwei Dreiecke (A, B, C) und (A', B', C') heißen *ähnlich*, wenn es eine Ähnlichhkeit λ mit $\lambda(A) = A'$, $\lambda(B) = B'$ und $\lambda(C) = C'$ gibt.

In den folgenden drei Aufgaben gelte in (E, G) zusätzlich das Parallelenaxiom (P) und das Vollständigkeitsaxiom (D2).

Aufgabe 9.3. Sei $\lambda\colon E \to E$ ein streckenerhaltender Automorphismus von (E, G) zu dem es eine reelle Zahl r gibt, so dass

$$r\, l(\overline{AB}) = l(\overline{\lambda(A)\lambda(B)})$$

für alle Punkte $A, B \in E$ gilt. Zeigen Sie, dass dann λ eine Ähnlichkeit ist.

Aufgabe 9.4. Sei $P \in E$ ein Punkt und $r > 0$ eine positive reelle Zahl. Sei $\delta\colon E \to E$ die Abbildung, die durch die folgende Eigenschaft eindeutig bestimmt ist: Es gilt $\delta(P) = P$, und jeder Punkt A in $E \setminus \{P\}$ wird durch δ auf den Punkt $\delta(A)$ auf dem Strahl aus P durch A abgebildet, für den $r\, l(\overline{PA}) = l(\overline{P\delta(A)})$ gilt.

Beweisen Sie, dass δ eine Ähnlichkeit ist. Es ist also insbesondere auch zu zeigen, dass δ bijektiv ist, Geraden auf Geraden sowie Strecken auf Strecken abbildet. (Hinweis: Benutzen Sie die vorige Aufgabe.)

Aufgabe 9.5. Zeigen Sie: Sind (A, B, C) und (A', B', C') Dreiecke mit $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C'$, $\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C'$ und $\measuredangle ACB \equiv A'C'B'$, so sind (A, B, C) und (A', B', C') ähnlich im Sinne der obigen Definition. (Hinweis: Benutzen Sie die vorige Aufgabe.)

*Abgabe: Donnerstag 18.12.2014 vor der Vorlesung.

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Geometrie“

Blatt 10*, 05.01.2015

In allen Aufgaben dieses Übungsblattes sei $E = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene. Wir fassen E mit den in der Vorlesung definierten (nichteuklidischen) Geraden und Strecken als Ebene im axiomatischen Sinne auf.

Aufgabe 10.1. Sei $a \in \mathbb{R}$, $g = \{z \in E \,|\, \mathrm{Re}(z) = a\}$ und $z_0 \in E \setminus g$. Bestimmen Sie die Gleichungen aller Geraden in E durch z_0, die parallel zu g sind. (Wie früher heißen zwei Geraden *parallel*, wenn sie disjunkt oder gleich sind.)

Aufgabe 10.2. Sei $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $g = \{z \in E \,\big|\, |z-a| = r\}$ und $z_0 \in E \setminus g$. Bestimmen Sie die Gleichungen aller Geraden in E durch z_0, die parallel zu g sind.

Aufgabe 10.3. Es seien die folgenden Punkte in der oberen Halbebene gegeben:

$$z_1 = -3+3i, \quad z_2 = 5+3i, \quad z_3 = -1+6i, \quad z_4 = 7+10i$$

Entscheiden Sie, ob die Geraden $g(z_1, z_2)$ und $g(z_3, z_4)$ sich schneiden. Falls ja, entscheiden Sie auch, ob die Strecken $s(z_1, z_2)$ und $s(z_3, z_4)$ sich schneiden.

Aufgabe 10.4. Es seien die folgenden Geraden in der oberen Halbebene gegeben:

$$g_1 = \{z \in E \,\big|\, |z-5| = 13\} \qquad g_2 = \{z \in E \,\big|\, |z-9| = 15\}$$

(i) Bestimmen Sie den Schnittpunkt z_0 von g_1 und g_2.
(ii) Bestimmen Sie für $k = 1, 2$ ein offenes Intervall $I_k \subset \mathbb{R}$ und eine differenzierbare Funktion $f_k \colon I_k \to \mathbb{R}$, so dass g_k der Graph von f_k ist.
(iii) Bestimmen Sie im Punkt z_0 die Gleichungen der Tangenten an g_1 und g_2. Die *Tangenten* sind hier die euklidischen Geraden in $\mathbb{R}^2$, die im Sinne der Differentialrechnung Tangenten zu den Funktionen f_1 und f_2 sind.

*Abgabe: Montag 12.01.2015 vor der Vorlesung.

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Geometrie“

Blatt 11*, 12.01.2015

Aufgabe 11.1. Geben Sie die Umkehrabbildungen für die in der Vorlesung betrachteten stereographischen Projektionen

$$\xi\colon S^1 \setminus \{i\} \to \mathbb{R},\ z \mapsto \frac{\operatorname{Re}(z)}{1-\operatorname{Im}(z)} \quad \text{und} \quad \xi\colon S^2 \setminus \{e_3\} \to \mathbb{C},\ (x_1,x_2,x_3) \mapsto \frac{x_1}{1-x_3} + \frac{x_2}{1-x_3}i$$

an.

Definition. Eine Teilmenge $C \subset S^2$ heißt ein *Kreis*, wenn C mindestens 2 Elemente hat und wenn es $(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $c \in R$ gibt, so dass

$$C = \{(x_1,x_2,x_3) \in S^2 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c\}$$

gilt. Mit anderen Worten: C ist der Schnitt von S^2 mit dem 2-dimensionalen affinen Unterraum

$$U = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c\}$$

von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 11.2. Sei $a + bi \in \mathbb{C}$, sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$, und sei $K = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z - (a+bi)| = r\}$ der euklidische Kreis mit Mittelpunkt $a+bi$ und Radius r. Zeigen Sie, dass das Urbild von K unter der stereographischen Projektion $\xi\colon S^2 \setminus \{e_3\} \to \mathbb{C}$ ein Kreis in S^2 ist.

Aufgabe 11.3. Sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1\}$ der Einheitskreis in $\mathbb{C}$, sei $H_1 = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| < 1\}$ das Innere des Einheitskreises und $H_2 = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| > 1\}$ das Äußere. Wir betrachten die Abbildung $\iota\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto (\overline{z})^{-1}$. Zeigen Sie:

(i) Die Abbildung ι schränkt sich ein zu einer Bijektion $\sigma\colon H_1 \setminus \{0\} \to H_2$.

(ii) Die Fixpunktmenge von ι ist S^1.

(iii) Die Abbildung σ aus (i) kann durch die folgende geometrische Konstruktion beschrieben werden: Zu $z \in H_1 \setminus \{0\}$ sei $z' \in S^1$ ein Schnittpunkt von S^1 und dem euklidischen Lot von z auf den euklidischen Strahl aus 0 durch z. Dann ist $\sigma(z)$ der Schnittpunkt des euklidischen Strahls aus 0 durch z mit dem Lot von z' auf die euklidischen Gerade durch 0 und z'.

Aufgabe 11.4. Es seien H_1 und σ wie in der vorigen Aufgabe definiert. Weiterhin seien $m \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben, so dass der euklidische Kreis $K = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-m| = r\}$ um m mit Radius r ganz in H_1 enthalten ist.

(i) Es gelte $0 \notin K$. Zeigen Sie, dass das Bild $\sigma(K)$ von K unter σ ein euklidischer Kreis ist, und bestimmen Sie die Gleichung dieses Kreises.

(ii) Es gelte $0 \in K$. Zeigen Sie, dass das Bild $\sigma(K \setminus \{0\})$ von K unter σ eine euklidische Gerade ist, und bestimmen Sie die Gleichung dieser Gerade.

---

*Abgabe: Montag 19.01.2015 vor der Vorlesung.

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Geometrie“

Blatt 12*, 19.01.2015

Aufgabe 12.1. Für $k \in \{1,2,3\}$ seien $a_k, b_k, c_k, d_k \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $a_k d_k - b_k c_k \neq 0$ für $k \in \{1,2\}$. Weiterhin gelte

$$\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $a_3 d_3 - b_3 c_3 \neq 0$ ist.

(ii) Sei nun

$$m_k \colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}} \qquad z \mapsto \frac{a_k z + b_k}{c_k z + d_k}$$

die durch a_k, b_k, c_k, d_k bestimmte Möbiustransformation. Zeigen Sie, dass $m_3 = m_1 \circ m_2$ gilt. Insbesondere ist also die Komposition von 2 Möbiustransformationen wieder eine Möbiustransformation.

Aufgabe 12.2. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $ad - bc \neq 0$, und sei

$$m \colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}} \qquad z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

die durch diese Koeffizienten bestimmte Möbiustransformation. Zeigen Sie, dass die Umkehrabbildung der bijektiven Abbildung $m \colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ wieder eine Möbiustransformation ist, und geben Sie ihre Koeffizienten an.

Aufgabe 12.3. Sei $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren 2×2-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{C}$.

(i) Die Menge $\mathrm{Bij}(\overline{\mathbb{C}}) = \{f \colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}} \mid f \text{ ist bijektiv}\}$ der bijektiven Selbstabbildungen von $\overline{\mathbb{C}}$ ist unter der Komposition eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die Menge der Möbiustransformationen Möb^+ eine Untergruppe von $\mathrm{Bij}(\overline{\mathbb{C}})$ ist.

(ii) Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\mu \colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \text{Möb}^+, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \left(z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right)$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.

(iii) Bestimmen Sie den Kern von μ, also die Untergruppe $\mathrm{Kern}(\mu) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \mid \mu(A) = \mathrm{id}_{\overline{\mathbb{C}}}\}$ von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Aufgabe 12.4. Bestimmen Sie die Fixpunkte der folgenden Möbiustransformationen:

(i) $m_1(z) = \frac{2z-1}{z+2}$

(ii) $m_2(z) = \frac{1}{z}$

(iii) $m_3(z) = \frac{z+i}{z-i}$

(iv) $m_4(z) = \frac{z-4}{z-3}$

*Abgabe: Montag 26.01.2015 vor der Vorlesung.

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Geometrie“

Blatt 13 (Probeklausur)*, 26.01.2015

Aufgabe 13.1. Sei (E, G) eine Ebene mit Strecken und Bewegungen.

(i) Zeigen Sie: Sind g und h zwei disjunkte Geraden in E, so gibt es eine Halbebene zu g, die h enthält.

(ii) Definieren Sie, wann Winkel in E *spitz* und *stumpf* heißen.

Aufgabe 13.2. (i) Definieren Sie den Begriff eines Isomorphismus von Ebenen mit Strecken und Bewegungen.

(ii) Sei (E, G) eine Ebene mit Strecken und Bewegungen und sei $P \cup s_1 \cup s_2$ ein Winkel in E, der kein gestreckter Winkel und kein Nullwinkel ist. Sei g die Winkelhalbierende dieses Winkels und sei β eine Bewegung mit der Eigenschaft $\beta(s_1) = s_2$ und $\beta(s_2) = s_1$. Zeigen Sie, dass $\beta = \sigma_g$ gilt.

Aufgabe 13.3. Sei (E, G) eine Ebene mit Strecken und Bewegungen. In der Vorlesung wurde zu E ein Monoid S mit einer Ordnungsrelation $\leq$ konstruiert.

(i) Definieren Sie die Menge S, die Addition $+$ und die Relation $\leq$. (Sie brauchen nicht zu zeigen, dass $+$ und $\leq$ wohldefiniert sind.)

(ii) Zeigen Sie: Wenn es einen injektiven und ordnungserhaltenden Monoidhomomorphismus $\lambda\colon S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt, dann erfüllt (E, G) das archimedische Axiom (D1).

Aufgabe 13.4. Sei (E, G) eine Ebene mit Strecken und Bewegungen, in der das archimedische Axiom (D1) und das Parallenaxiom (P) gilt. Seien (A, B, C) drei verschiedene Punkte in E und sei $P \in \overline{AB}$ ein Punkt mit der Eigenschaft

$$\overline{PA} \equiv \overline{PB} \equiv \overline{PC}.$$

Zeigen Sie, dass $\measuredangle ACB$ ein rechter Winkel ist.

(Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass in E die Summe der Innenwinkel jedes Dreiecks die Summe von 2 rechten Winkeln ist.)

Aufgabe 13.5. Sei m die durch $m(z) = \frac{z}{iz+1}$ gegebene Möbiustransformation.

(i) Bestimmen Sie die Fixpunktmenge von m.

(ii) Bestimmen Sie eine zu m inverse Möbiustransformation.

(iii) Bestimmen Sie eine Möbiustransformation $n \in \text{Möb}^+$ mit

$$n(i) = 0, \qquad n(1) = \frac{i+1}{2} \qquad \text{und} \qquad n(-i) = i.$$

(Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Werte von 0, $\frac{i+1}{2}$ und i unter der Abbildung m.)

*Abgabe: Montag 02.02.2015 vor der Vorlesung.