Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde & Informatica
Opleiding Bachelor Informatica

Introductie Calculus voor Informatica

waarin opgenomen

Ian Craw:
Advanced Calculus and Analysis

chapters 1-7

http://www.maths.abdn.ac.uk/ĩgc/tch/ma2001/index/index.html

W.W.L.Cheng and X.T.Duong:
Introduction to Integration

http://www.maths.mq.edu.au/w̃chen/lnemfolder/em14-ii.pdf

met inleiding en aanvullingen van
Ernic Kamerich

september 2007

Inhoud

Ian Craw: Advanced Calculus and Analysis, chapters 1-7

W.W.L.Chen and X.T.Duong: Elementary mathematics, chapter 14

De opzet van deze syllabus is als volgt:

- Eerst de hoofdstukken A-F, waarin basiskennis wordt opgefrist en aangevuld. De antwoorden van de bijbehorende opgaven staan achter in het boek.
- Vervolgens telkens een hoofdstuk uit Ian Craw: Advances Calculus and Analysis, steeds voorafgegeaan door eventuele toevoegingen en correcties van tikfouten en gevolgd door uitwerkingen van de opgaven van Ian Craw (door Ernic Kamerich) en extra opgaven. De uitwerkingen van die extra opgaven staan achter in het boek.
  Om didactische redenen is het chapter 3 verschoven achter chapter 5.
- Tenslotte het hoofdstuk van W.W.L.Cheng and X.T.Duong: Integration, weer voorafgegaan door een toevoeging.
- Tenslotte uitkomsten en uitwerkingen van de opgaven van Ernic Kamerich en een index van trefwoorden.

Intussen is de tekst zo een mix van Engelse en Nederlandse fragmenten geworden.
Omdat de tekst van Ian Craw slechts als pdf beschikbaar is, konden de paginanummers hiervan niet gewijzigd worden. Dat kan misschien verwarring opleveren dooordat chapter 3 achter chapter 5 gezet is.
De paginanummers van de toevoegingen bij de hoofdstukken van Ian Craw en van W.W.L.Cheng and X.T.Duong zijn gekozen als een paginanummer van dat hoofdstuk waar voor of achter dit moet worden ingevoegd (soms een lege pagina die hier weggelaten is), gevolgd door een extra cijfer.

hoofdstuk A

Benaderingen en afwijkingen

Bij het rekenen op computers is het werken met benaderingen vaak onvermijdelijk. Het is prettig dat computers snel kunnen rekenen om benaderingen te bepalen. Vaak gaat dat benaderen door het herhalen van een proces waarmee je telkens vanuit een benadering een nieuwe, betere benadering vindt. Maar het herhalen van rekenprocessen levert ook opeenstapelingen van rekenfouten die de onnauwkeurigheid in de uitkomst enorm kunnen vergroten.
We gaan hier kijken naar benaderingen en de bijbehorende afwijkingen. In het volgende hoofdstuk gaan we kijken naar het wiskundige fundament: de reële getallen.

A.1 Decimale puntnotatie en scientific notation

In overeenstemming met de internationale standaard zullen we geen decimale komma maar een punt noteren, dus niet 83,1456 maar 83.1456. Die notatie noemen we hier kort de '**puntnotatie**' of '**floating point notation**'.
Let op: 1.234 is hier dus niet ruim over de duizend, maar een beetje meer dan 1.
Vaak zullen we we hier de internationale standaardnotatie '**scientific notation**' gebruiken: één cijfer (niet 0) vóór de punt, dan nog één of meer cijfers en dan een gehele macht van 10.
Een getal in de simpele puntnotatie 0.00345 wordt in scientific notation dus geschreven als $3.45 \cdot 10^{-3}$ of $3.45\text{E}{-3}$.
Het getal $34\,500$ wordt in scientific notation geschreven als $3.45 \cdot 10^4$ of $3.45\text{E}4$.

A.2 Binaire puntnotatie

Het idee van decimale puntnotatie kun je ook binair uitvoeren:

$$823.574_{dec} = 8 \times 10^2 \ + 2 \times 10^1 \ + 3 \times 10^0 \ + 5 \times 10^{-1} \ + 7 \times 10^{-2} \ + 4 \times 10^{-3}$$

$$101.1101_{bin} = 1 \times 2^2 \ + \ 0 \times 2^1 \ + \ 1 \times 2^0 \ + \ 1 \times 2^{-1} \ + \ 1 \times 2^{-2} \ + \ 0 \times 2^{-3} \ + \ 1 \times 2^{-4}$$

Ook binair kun je scientific notation gebruiken:

$>$ in plaats van 11101.0011_{bin} schrijf je dan $1.11010011 \times 10^{100}{}_{bin}$ of $1.11010011\,\text{E}\,100_{bin}$;
let op dat die 10^{100} ook in binaire notatie zijn gezet: decimaal genoteerd staat er 2^4!

$>$ in plaats van 0.001101_{bin} schrijf je dan 1.101×10^{-11} of $1.101\,\text{E}\,{-11}_{bin}$.

Daartoe verschuif je dus de punt zodat er links van de punt alleen maar één cijfer ongelijk aan 0 komt, dus er komt in binaire notatie automatisch een 1 vóór de punt. Dat getal wordt de **significant** (ook wel **mantisse**) genoemd. Alleen voor het getal 0 werkt het niet: je kunt dan niet een 1 links van de punt krijgen.

Opgaven

opgave A.1 — *oefening*
Noteer het getal 11.1101_{bin}

a. met machten van 2, zoals boven is gebeurd.

b. als een gewone breuk, maar nu met binaire notatie van teller en noemer.

c. als een gewone breuk met decimale notatie,

opgave A.2 — *oefening*

a. Vertaal het getal dat hier decimaal gegeven wordt door

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}$$

in binaire puntnotatie.

b. Geef een simpele formule voor dat getal.

A.3 Afronden

Er zijn een paar afspraken over het afronden van puntgetallen:

- In principe rond je af naar het dichtstbijzijnde getal, dus 0.3452 afronden op 3 cijfers na de punt levert 0.345 en 0.3457 levert 0.346.
- Alleen bij het weglaten van een cijfer 5 (en eventueel daarachter nullen) aan het eind moet je kiezen. De tegenwoordige standaard is: afronden naar een even eindcijfer. Dus 0.345 (of) 0.34500 afronden naar 2 cijfers achter de punt levert 0.34. Net zo levert 0.375 bij afronden 0.38.
  Zo werkt het ook bij binaire puntgetallen: 0.101000_{bin} afronden op 2 cijfers na de punt levert 0.10_{bin}, maar 0.111000_{bin} levert 1.00_{bin}.
- Er is een belangrijke uitzondering op de bovenstaande afrondregel: bij ongelijkheden ga je altijd 'veilig' afronden:
  - Bijvoorbeeld de eis $x < 0.375$ zet je dan om in $x < 0.37$: als aan dat laatste voldaan is, is ook aan de eerste eis voldaan. Je rond daar dus af door strenger te worden. Zo ook wanneer een nauwkeurigheid van 0.0077 wordt vereist, mag je afronden door voor je zelf een nauwkeurigheid van 0.007 te nemen: dan voldoe je zeker aan de gestelde eis.
  - Als je als resultaat vindt dat je uitkomst een nauwkeurigheid van .063 heeft dan kun je veilig zeggen dat de afwijking minder dan 0.07 is; hier rond je dus in principe juist naar boven af.

Opgaven

opgave A.3 — *oefening*

Rond af tot 3 cijfers na de punt: 1.70950, 2.709541, 3.709492, 4.708500, 5.70851

opgave A.4 — *oefening*

Rond af tot 4 cijfers na de punt: 0.01011_{bin}, 1.010010_{bin}, 0.1111100_{bin}, 0.111101_{bin}, 0.111010_{bin}

opgave A.5 — *oefening*

Rond af op 3 cijfers na de punt: $a < 0.1234$, $b > 0.1234$, $c < -0.1234$, $d > -0.1234$

a. voor het geval dit eisen zijn;

b. voor het geval dit resultaten zijn.

A.4 De vervelende effecten van tussentijds afronden

Afronden in stappen werkt vaak slecht. Bijvoorbeeld 0.3452 afronden op 2 cijfers na de punt levert natuurlijk 0.35: je kiest het dichtstbijzijnde. Maar als je afrond in twee stappen krijg je $0.3452 \Rightarrow 0.345 \Rightarrow 0.34$.
Dat laat meteen een probleem zien: als je als afgeronde waarde 0.345 krijgt, dan weet je niet of naar boven of naar beneden is afgerond en als je dan zelf netjes volgens de afspraak verder gaat afronden naar 0.34 is dat misschien niet

ideaal. Dit is een goede reden om bij een afgerond getal er niet van uit te gaan dat de afronding correct is uitgevoerd. Als we dus als afgeronde waarde $x = 0.34$ krijgen, zullen we dat interpreteren als $0.33 < x < 0.35$.
In tussenresultaten van berekeningen is het verstandig niet nodeloos af te ronden. Tussentijdse afrondingen kunnen gemakkelijk leiden tot (nodeloos) opstapelen van afrondfouten en daardoor tot een minder nauwkeurig resultaat. Bij het rekenen op rekenmachines kun je tussentijds afronden doorgaans vermijden door gebruik te maken van de interne geheugens.

Rond niet nodeloos tussentijds af in berekeningen. Rond aan het eind ineens af tot de gewenste nauwkeurigheid.

A.5 Nauwkeurigheid en de notatie van getallen

Als een waarde van een variabele opgegeven wordt, dan is het gebruikelijk dat je niet meer cijfers opgeeft dan verantwoord is.

(A.1) *voorbeeld:*

Stel dat voor een zeker chemisch omzettingsproces S → P, dat (aanvankelijk) verloopt met een snelheid $V = k \cdot [S]$, opgegeven wordt:

de reactieconstante $k = 4.321 \cdot 10^{-2}$;

de concentratie $[S] = 3.9 \cdot 10^{-3}$.

—? *vraag:* Wat is de omzettingssnelheid? En hoe nauwkeurig kun je die bepalen?
antwoord: Je zou misschien met de zojuist gebruikte formule de omzettingssnelheid V als volgt willen uitrekenen:

$$V = 4.321 \cdot 10^{-2} \cdot 3.9 \cdot 10^{-3} = 1.68519 \cdot 10^{-4}$$

maar daarmee suggereer je een nauwkeurigheid die er niet is!
Strikt genomen betekenen de gegevens hier:

$$4.320 \cdot 10^{-2} < k < 4.322 \cdot 10^{-2}$$

$$3.8 \cdot 10^{-3} < [S] < 4.0 \cdot 10^{-3}$$

want doorgaans wordt de afspraak gebruikt dat getallen met één hoger en één lager laatste cijfer de grenzen vormen. We zullen daar niet al te strikt op letten, maar wel cijfers die echt geen betekenis hebben, weglaten. Anderzijds willen we ook niet nodeloos onnauwkeurig werken door te veel afronden.

(A.2) afspraak: *In een gegeven of een eindresultaat worden niet meer cijfers van een getal geschreven dan verantwoord is: in principe is de nauwkeurigheid van een decimaal geschreven getal gegeven als plus of min één (ongeveer) in het laatste cijfer.*

Als we de reactiesnelheid V met de formule gaan berekenen krijgen we

op zijn laagst $4.320 \cdot 10^{-2} \cdot 3.8 \cdot 10^{-3} = 1.6416 \cdot 10^{-4}$

op zijn hoogst $4.322 \cdot 10^{-2} \cdot 4.0 \cdot 10^{-3} = 1.7288 \cdot 10^{-4}$

dus

$$1.6416 \cdot 10^{-4} < V < 1.7288 \cdot 10^{-4}$$

We geven als resultaat:

$$V = 1.7 \cdot 10^{-4}$$

en daarmee zijn we nog binnen de officiële grenzen: $1.6 \cdot 10^{-4} < V < 1.8 \cdot 10^{-4}$.
—¿

We hadden dit resultaat ook kunnen krijgen door de vermenigvuldiging gewoon maar uit te voeren: $4.321 \cdot 10^{-2} \times 3.9 \cdot 10^{-3} = 1.68519 \cdot 10^{-4}$ en dan af te ronden tot $1.7 \cdot 10^{-4}$.
We zeggen hier

- $k = 4.321 \cdot 10^{-2} = 0.04321$ is in 4 **cijfers nauwkeurig** gegeven;
- $[S] = 3.9 \cdot 10^{-3} = 0.0039$ is in 2 *cijfers nauwkeurig* gegeven.
- $[V] = 1.7 \cdot 10^{-4}$ is in 2 *cijfers nauwkeurig* berekend.

einde voorbeeld

A.6 Afwijkingen bij optellen en aftrekken

(A.3) *voorbeeld:*

Gegeven zijn twee meetwaarden a en b:

$a = 1.2345 \cdot 10^1$ (dat betekent dus: $12.344 < a < 12.346$)

$b = 4.444 \cdot 10^{-2}$ (dat betekent dus: $0.04443 < b < 0.04445$)

—? *vraag:* Wat is $a + b$? En hoe nauwkeurig kun je $a + b$ berekenen?
antwoord: We krijgen voor $a + b$

op zijn laagst $12.344 + 0.04443 = 12.38843$

op zijn hoogst $12.346 + 0.04445 = 12.39045$.

Dus als we $a + b$ gewoon uitrekenen door de benaderingen bij elkaar op te tellen:

$$a + b = 12.34944$$

dan kan de maximale afwijking naar boven of beneden 0.00101 zijn. Die uitkomst met 5 cijfers achter de punt is dus niet zinvol. We geven

$$a + b = 12.349$$

met maximale afwijking (een beetje optimistisch maar niet helemaal correct afgerond op) 0.001.
—¿

einde voorbeeld

Als we twee positieve getallen a en b willen optellen, maar we nemen in plaats daarvan twee benaderingen a' en b' met maximale afwijking respectievelijk α en β:

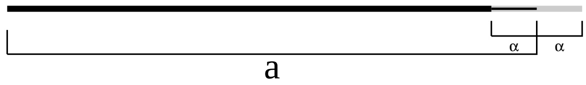


Fig A.1 $a - \alpha < a' < a + \alpha$

b' met maximale afwijking β:

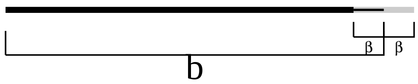


Fig A.2 $b - \beta < b' < b + \beta$

dan krijgen we bij het optellen

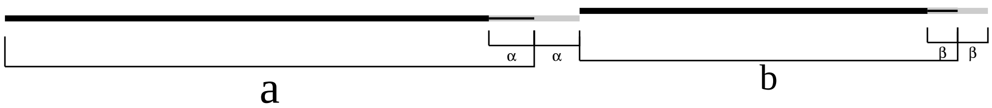


Fig A.3 *maximaal* $a + b + \alpha + \beta$

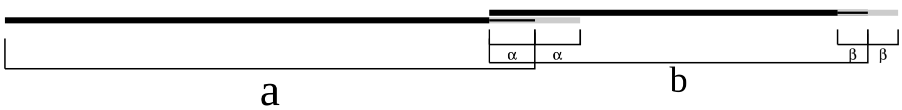


Fig A.4 *minimaal* $a + b - \alpha - \beta$

Dus de totale afwijking (omhoog of omlaag) is nu hoogstens $\alpha + \beta$.
Natuurlijk zou het kunnen zijn, dat bijvoorbeeld de afwijking in a positief en de afwijking in b negatief, dan valt de afwijking $\alpha + \beta$ gunstig uit. Vaak weet je echter niet welke kant uit de afwijking gaat, en in zo'n geval schat je de afwijking veilig met de som van de afwijkingen. Om verwarring met mintekens te voorkomen schrijven we de maximale afwijking als $\pm(|\alpha| + |\beta|)$.
Bij negatieve getallen en bij het aftrekken gaat het net zo.

(A.4) vuistregel voor afwijking bij optellen en aftrekken:
Bij het optellen en aftrekken schat je onnauwkeurigheden (afwijkingen) door deze (in absolute waarde!) bij elkaar op te tellen.

A.7 Afwijkingen bij vermenigvuldigen en machtsverheffen

(A.5) *voorbeeld:*

Weer is gegeven dat

$a = 1.2345 \cdot 10^1$ (dat betekent dus: $12.344 < a < 12.346$)

$b = 4.444 \cdot 10^{-2}$ (dat betekent dus: $0.04443 < b < 0.04445$)

—? *vraag:* Wat is $a \cdot b$? En hoe nauwkeurig kun je $a \cdot b$ berekenen?
antwoord: We krijgen voor $a \cdot b$

op zijn laagst $12.344 \cdot 0.04443 = 0.54844392$

op zijn hoogst $12.346 \cdot 0.04445 = 0.54877970$.

Als we gewoon de gegeven benaderingen van a en b vermenigvuldigen krijgen we

$$a \cdot b = 0.5486118$$

De maximale afwijking naar boven en beneden is dan 0.0001679, en die mogen we afronden op: 0.00017 of 0.0002.
De maximale afwijking naar boven kun je ook zó berekenen:

$$(12.345 + 0.001) \cdot (0.04444 + 0.00001)$$

$$= 12.345 \cdot 0.04444 + 0.001 \cdot 0.04444 + 12.345 \cdot 0.00001 + 0.001 \cdot 0.00001$$

Net zo voor de maximale afwijking naar beneden.
—¿

Let op: dit is doorgaans niet een handige methode! Zie de vuistregel voor afwijking bij vermenigvuldigen!

einde voorbeeld

We gaan twee positieve getallen a en b vermenigvuldigen. Dat komt neer op het berekenen van de oppervlakte van een rechthoek met zijden a en b:

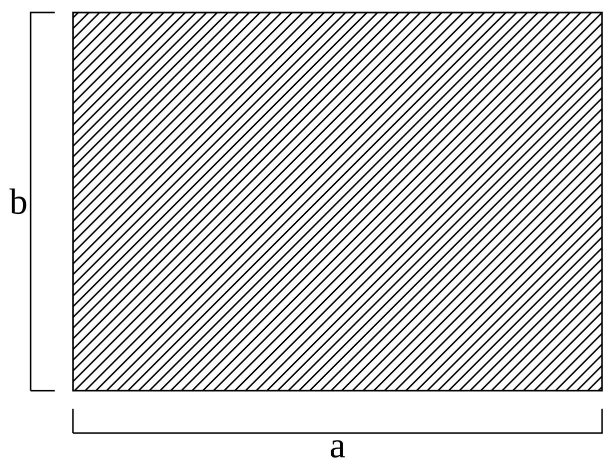


Fig A.5 $a \cdot b$

Nu nemen we in plaats van a en b twee benaderingen a' en b' met maximale afwijking respectievelijk α en β:

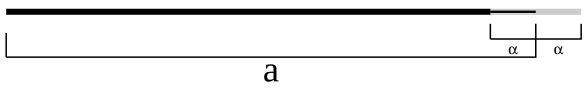


Fig A.6 $a - \alpha < a' < a + \alpha$

b' met maximale afwijking β:

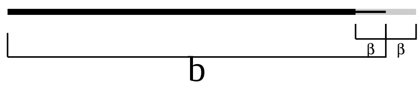


Fig A.7 $b - \beta < b' < b + \beta$

dan krijgen we bij het vermenigvuldigen

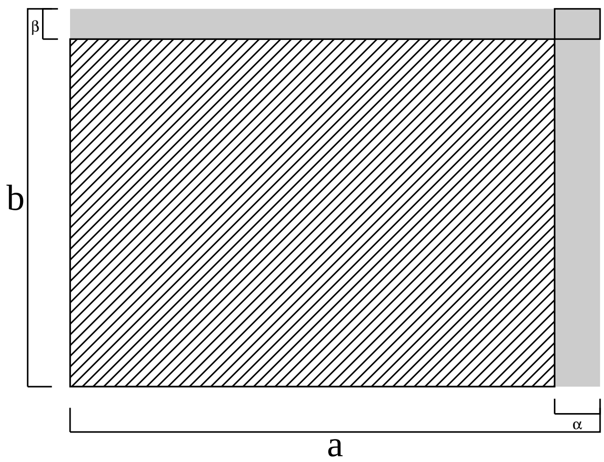


Fig A.8 *maximaal* $a \cdot b + a \cdot \beta b + b \cdot \alpha + \alpha \cdot \beta$

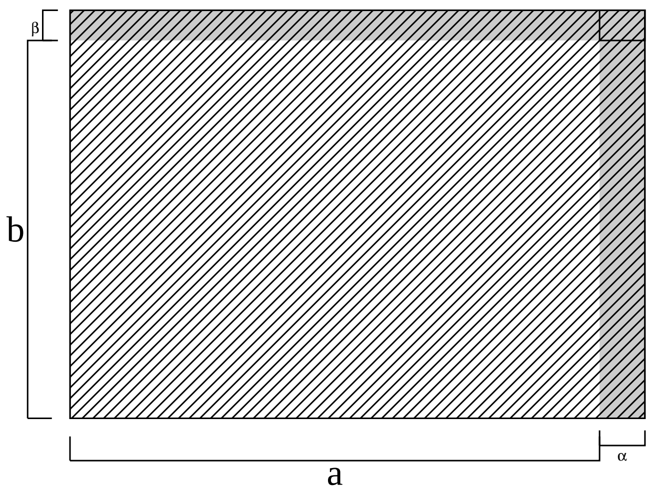


Fig A.9 *minimaal* $a \cdot b - a \cdot \beta b - b \cdot \alpha + \alpha \cdot \beta$

Dus de totale afwijking is nu hoogstens $a \cdot \beta + b \cdot \alpha + \alpha \cdot \beta$. Normaal is de maximale fout in a veel kleiner dan $|a|$ en de maximale fout in b veel kleiner dan $|b|$ en dan kun je de fout aardig goed schatten door die term $\alpha \cdot \beta$ weg te laten. In het voorbeeld zou je krijgen:

$$0.001 \cdot 0.04444 + 12.345 \cdot 0.00001 + 0.001 \cdot 0.00001$$

De laatste term heeft inderdaad weinig in te brengen.
Je kunt hier veel mooier mee rekenen m.b.v. de relatieve afwijking:

(A.6) afspraak: *Als a' wordt gezien als een benadering van a dan is de* **relatieve afwijking** *van a' t.o.v. a gelijk aan $|\frac{a'-a}{a}|$.*

De **procentuele afwijking** *is dan $|\frac{a'-a}{a}| \cdot 100$.*

Merk op, dat als de relatieve afwijking van a' t.o.v. a klein is, je die relatieve afwijking ook best kunt schatten als $|\frac{a'-a}{a'}|$.
We gaan nu de maximale relatieve afwijking van bovenstaand product uitrekenen. Volgens de gegevens weten we:

$$\text{de relatieve fout in } a' \text{ is maximaal } \frac{\alpha}{a}$$

$$\text{de relatieve fout in } b' \text{ is maximaal } \frac{\beta}{a}$$

Volgens de voorgaande berekening kun je die schatten als

$$\left|\frac{a \cdot \beta + b \cdot \alpha}{a \cdot b}\right| = \left|\frac{\beta}{b} + \frac{\alpha}{a}\right|$$

als je dit afschat (worst case!) als

$$\left|\frac{\beta}{b}\right| + \left|\frac{\alpha}{a}\right|$$

dan krijg je precies de som van de relatieve fouten.
Bovenstaande hebben we gedaan voor het geval dat a en b positief zijn. Voor het geval dat a en/of b negatief zijn gaat het net zo, alleen moet je wat morrelen met plus/min-tekens en/of absolute waarde. Het werkt wel slechts in het geval de relatieve fouten klein zijn, zeg minder dan 1%.

(A.7) vuistregel voor afwijking bij vermenigvuldigen:
Bij het vermenigvuldigen schat je relatieve afwijkingen (met een kleine verwaarlozing) als de som van de maximale relatieve afwijkingen in de factoren. Zo'n schatting is redelijk nauwkeurig als de relatieve afwijkingen minder dan 1% bedragen.

Omdat machtsverheffen met een natuurlijke exponent hetzelfde is als vermenigvuldigen kun je daarvoor meteen bovenstaande regel gebruiken. Die werkt echter alleen voldoende nauwkeurig als de afwijkingen klein zijn. Voor niet-natuurlijke exponenten werkt het even goed; dat gaan we hier niet beredeneren.

(A.8) vuistregel voor afwijking bij machtsverheffen: *Bij het machtsverheffen schat je relatieve afwijkingen (met een kleine verwaarlozing) als het product van de exponent en de maximale relatieve afwijking in het grondtal.*
Zo'n schatting is redelijk nauwkeurig als de relatieve afwijkingen in grondtal en uitkomst (!!!) minder dan 1% bedragen.

(A.9) *voorbeeld:*

Gegeven zijn de getallen 5.00 en 8.00, beide met relatieve nauwkeurigheid 0.01. Bereken het product en de nauwkeurigheid daarvan met de vuistregel.
Product 40. We kunnen inderdaad de vuistregel gebruiken, want de afwijkingen zijn minder dan 1%.

Eerst berekenen we de relatieve maximale afwijkingen: $\frac{0.01}{5} = 0.002$ en $\frac{0.01}{8} = 0.00125$. Som daarvan: 0.00375. De afwijking in het product is dus maximaal ongeveer $40 \cdot 0.00375 = 0.15$.

einde voorbeeld

Opgaven

opgave A.6 — *oefening*
Bereken in voorbeeld (A.5) de relatieve afwijkingen in de getallen en controleer dat bovenstaande regel hier goed bruikbaar is.

opgave A.7 — *oefening*
Gemeten is dat $p = 827.3$ met een nauwkeurigheid van 0.2 en dat $q = 4.181$ met een nauwkeurigheid van 0.001.

a. Hoe nauwkeurig kun je $p \cdot q$ berekenen?

b. Hoe nauwkeurig kun je q^{10} uitrekenen?

opgave A.8 —
Mijn rekenmachine zegt dat

$$e^{50} = 5.184705529 \cdot 10^{21}$$

Dat suggereert dat hij het in 10 cijfers nauwkeurig weet. Om inderdaad die precisie te halen, hoe nauwkeurig moet de machine dan e kennen?

A.8 Afwijkingen bij delen

Opgave

opgave A.9 — *oefening*
Neem de getallen uit voorbeeld (A.5) , deel ze op elkaar, bepaal de hoogst en laagst mogelijke uitkomst. Bereken ook de relatieve afwijkingen en geef een vermoeden over hoe dat werkt voor delen.

We gaan de relatieve afwijking van $\frac{a}{b}$ berekenen als de absolute waarde van het verschil tussen benaderende waarde en echte waarde gedeeld door de echte waarde:

$$\frac{\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b}}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b}\right) = \frac{ba \cdot a'}{b'} - \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{b \cdot a'}{a \cdot b'} - 1 = \frac{b \cdot a' - a \cdot b'}{a \cdot b'}$$

Voor de foutschatting is een beetje benaderen niet erg; we vervangen de noemer door $a \cdot b$:

$$= \frac{b \cdot a' - a \cdot b'}{a \cdot b}$$

Omdat we naar de verschillen tussen a' en a en tussen b' en b moeten kijken, gaan we a' vervangen door $(a' - a) + a$ en b' door $(b' - b) + b$; dat levert:

$$= \frac{b \cdot ((a' - a) + a) - a \cdot ((b' - b) + b)}{a \cdot b} = \frac{b \cdot (a' - a) - a \cdot (b' - b)}{a \cdot b} = \frac{a' - a}{a} - \frac{b' - b}{b}$$

Die twee laatste termen zijn juist de relatieve fouten in a en b. Als de afwijkingen tegengesteld zijn (dus bijvoorbeeld a' een beetje te groot en b' juist een beetje te klein), dan versterken ze elkaar. We moeten de relatieve fout in $\frac{a}{b}$ dus, net als bij het vermenigvuldigen, afschatten als de som van de maximale relatieve fouten in a en b.

(A.10) vuistregel voor afwijking bij delen:
Bij het delen schat je relatieve afwijkingen (met een kleine verwaarlozing) als de som van de maximale relatieve afwijkingen.
Ook hier weer de beperking: die schatting is redelijk goed als de relatieve afwijkingen in teller en noemer minder dan 1% zijn.

Opgaven

opgave A.10 — *oefening*
Bereken $\frac{36.5 \cdot 0.298 - 9.94}{0.482}$ en de nauwkeurigheid van de uitkomst, als je er van uitgaat dat elk van de gegeven getallen gegeven is met een nauwkeurigheid van ± 1 in het laatste cijfer. Controleer je werkwijze met de lijst van antwoorden!

opgave A.11 — *oefening*
Gegeven zijn de getallen x en y. Het getal x ligt ergens in de buurt van 0.1 en y ligt in de buurt van 2. De meetnauwkeurigheid van x is ongeveer 0.0004 en de meetnauwkeurigheid van y is ongeveer 0.01.

a. Hoe nauwkeurig kun je $x - y$ berekenen?
b. Hoe nauwkeurig kun je $100x + y$ berekenen?
c. Hoe nauwkeurig kun je $x \cdot y$ berekenen?
d. Hoe nauwkeurig kun je $(40 + x) \cdot (y - 1\frac{1}{2})$ berekenen?
e. Hoe nauwkeurig kun je $\frac{x}{y}$ berekenen?

opgave A.12 — *oefening*
Gegeven zijn meetgetallen

$$a = 7.89 \quad \text{en} \quad b = 22.15$$

beide met een nauwkeurigheid van 0.01. Bereken $a^3 - b^2$ en bereken de nauwkeurigheid van je resultaat. Geef dan het resultaat op een verantwoorde wijze.

opgave A.13 — *oefening*
Laat zien: als β de maximale (absolute) afwijking in b is, dan is de maximale (absolute) afwijking in b^{10} gelijk aan $10b^9 \cdot \beta$, mits β klein is t.o.v. b.

opgave A.14 — *oefening*
Gegeven is de functie f:

$$f: \quad x \mapsto \frac{10x^5 - x^3}{200x^4 - 3}$$

Bereken m.b.v. de rekenregels voor afwijkingen een schatting van de maximale afwijking van $f(a)$ als a een meetgetal met $a = 0.345$ met een maximale afwijking van 0.003.

opgave A.15 — *oefening*
Gegeven zijn twee getallen a en b; waarbij a een getal in de buurt van 200 is en b ongeveer 0.5. (Ik bedoel hier niet dat $199 < a < 201$.)
Let op: ‘hoe nauwkeurig’ in het vervolg betekent niet: ‘in hoeveel cijfers nauwkeurig’, maar ‘hoeveel mag de maximale afwijking zijn?’ en daarbij gaat het om een redelijke schatting.
Als je wilt dat de bijdrage van beide getallen aan de onnauwkeurigheid van de uitkomst ongeveer gelijk is, hoe nauwkeurig moet je dan a en b bepalen om

a. $a + b$ met een afwijking van minder dan 0.001 te berekenen.

b. $a - b$ met een afwijking van minder dan 0.001 te berekenen.

c. $a \cdot b$ met een afwijking van minder dan 0.001 te berekenen.

d. $\frac{a}{b}$ met een afwijking van minder dan 0.001 te berekenen.

e. $a + b^6$ met een afwijking van minder dan 0.001 te berekenen.

hoofdstuk B

De reële getallen

De centrale begrippen van de calculus, limieten, differentiëren en integreren, zijn gebaseerd op de reële getallen. Hier krijg je een elementaire introductie op het concept van de reële getallen. Dat is in dit kader voldoende; een complete uitwerking zou hier te ver voeren.

B.1 Zijn de rationale getallen niet genoeg?

Als je er van uitgaat, dat de lengte van een diagonaal van een vierkant met zijden van lengte 1 een getal is, en dat de omtrek van een cirkel met straal 1 een getal is, dan kom je met de rationale getallen tekort. Voor het eerste van die twee is dat simpel te zien:

—? *vraag:* Is er een rationaal getal waarvan het kwadraat 2 is?
antwoord: Stel dat $x \in Q$ en $x^2 = 2$. Laat p en q natuurlijke getallen (ongelijk aan 0) zijn zodat $x = \frac{p}{q}$; we mogen er natuurlijk van uitgaan dat we vereenvoudigd hebben, dus dat $\mathrm{ggd}(p, q) = 1$. Dan

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

$$p^2 = 2q^2$$

Dus 2 is een deler van $p \cdot p$. Omdat 2 een priemgetal is, volgt dat 2 een deler is van p, dus kun je schrijven $p = 2p'$ met $p' \in N$.

$$(2p')^2 = 2q^2$$

$$2p'^2 = q^2$$

Dus 2 is een deler van $q \cdot q$. Omdat 2 een priemgetal is, volgt dat 2 een deler is van q. Maar nu is dus 2 een gemeenschappelijke deler van p en q, in strijd met de veronderstelling dat $\mathrm{ggd}(p, q) = 1$. Onze beginveronderstelling is blijkbaar onjuist. Er is dus geen rationaal getal waarvan het kwadraat 2 is.
—¿

Laten we nu eens simpel meetkundig denken. Als we een vierkant met zijden van 1 meter tekenen en daarin de diagonaal meten met een meetlat, dan kunnen we in millimeters nauwkeurig meten; het resultaat is gemakkelijk te voorspellen want

$$1.414^2 = 1.999396 \quad \text{en} \quad 1.415^2 = 2.002225$$

dus de lengte van de diagonaal ligt ergens tussen 1.414 en 1.415 meter. Bij een meting in millimeters nauwkeurig verwacht je dus 1.414 of 1.415 millimeter.
Met nog iets betere spullen kunnen we tot een tiende millimeter nauwkeurig meten. Omdat

$$1.4142^2 = 1.99996164 \quad \text{en} \quad 1.4143^2 = 2.00024449$$

zou een goede meting daarmee 1.4142 of 1.4143 meter moeten opleveren.
Zo kun je ook berekenen wat je zou krijgen als je in 10^{-30} meter nauwkeurig zou kunnen meten: 1.414 213 562 373 095 048 801 688 724 209 of 1.414 213 562 373 095 048 801 688 724 210, maar fysisch is dat natuurlijk volkomen nonsens: atoomkernen hebben al een diameter in de orde van 10^{-14} meter.

Van de andere kant is rekenen met een beperkte nauwkeurigheid heel lastig, vooral doordat kleine verschillen bij het doorrekenen grote verschillen in uitkomsten kunnen leveren. Dat kun je in de volgende opgave nog ervaren. Het heeft dus voordelen om met onbeperkte precisie te rekenen. Dat is wat we doen bij het rekenen met *reële getallen.* In feite idealiseren we bovenstaande tot oneindig veel decimalen.

Opgave

opgave B.1 —
Bereken $(50.42-49.81)\cdot 3.45$. Ga er van uit dat de gegeven getallen meetwaarden zijn die in twee cijfers na de komma nauwkeurig zijn, dus met afwijkingen tot 0.01. Hoe nauwkeurig is de uitkomst? Heb je hier commentaar bij?

B.2 De positieve reële getallen

In een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 1 en 1 is de lengte van de schuine zijde in het kwadraat gelijk aan 2 volgens Pythagoras. Maar er is geen rationaal getal waarvan het kwadraat gelijk aan 2 is. We gaan nu een nieuw getal maken waarvan het kwadraat wel gelijk aan 2 is, noem het maar $\sqrt{2}$,. Dat is dan dus een getal van een niet-rationaal type, een reëel getal. Dat gaan we maken als een oneindige rij decimale getallen die als het ware steeds beter benaderen wat je wilt.
Dat kan op verschillende manieren. We zullen dat hier doen door ‘benaderingen van onder’, dus door steeds een decimaal getal met een zeker aantal cijfers achter de punt te nemen, waarvan het kwadraat kleiner is dan 2, en dan zo groot mogelijk:

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ 1.414213,\ 1.4142135,\ 1.41421356,\ \ldots$$

Nu is het werken met decimale getallen eigenlijk nogal willekeurig: je zou ook met binaire floating point getallen kunnen rekenen of andere rationale getallen. We gaan een reëel getal ‘dat groter dan 0 is’ nu opvatten als een zwak-stijgende rij van positieve rationale getallen ≥ 0, die begrensd is. **Zwak-stijgend** wil zeggen dat iedere volgende stap groter of gelijk is aan de voorgaande. En **begrensd** wil zeggen dat er een (rationaal) getal is, zodat alle elementen van de rij kleiner zijn dan dat getal. Je hoeft met de grens niet zuinig te zijn: hier zou je gerust kunnen zeggen dat alle elementen kleiner zijn dan 1000000.
Laten we eens kijken hoe je de getallen die we al hadden, de positieve rationale getallen, nu als reëel getal kunt zien; die willen we immers niet kwijt!
Als we bijvoorbeeld $\frac{1}{3}$ als reëel getal willen zien, kunnen we daarbij bijvoorbeeld één van de volgende rijen nemen:

$$\begin{aligned} a &= 0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, 0.33333, \ldots \\ b &= \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots \\ c &= 0.01_{bin}, 0.010_{bin}, 0.0101_{bin}, 0.01010_{bin}, 0.010101_{bin}, \ldots \end{aligned}$$

Dat zijn allemaal zwak stijgende rijen positieve rationale getallen, die begrensd zijn, maar wel zo dat je *willekeurig dicht bij* dat getal $\frac{1}{3}$ komt.
Natuurlijk willen we die drie rijen allemaal als hetzelfde reële getal opvatten. We moeten dus tussen dergelijke rijen een equivalentierelatie maken, die aangeeft wanneer twee rijen hetzelfde reële getal representeren. Dat is eenvoudig: je noemt twee van dergelijke rijen **equivalent** als de verschillen op den duur “te verwaarlozen” zijn. Preciezer: als iemand jou vertelt wat hij/zij klein genoeg vindt om te verwaarlozen, moet jij kunnen aangeven vanaf welke plaats de elementen van beide rijen verwaarloosbaar weinig verschillen.

(B.1) definities:

- *Een rij getallen* a*, zeg* $a_0, a_1, a_2, \ldots$*, wordt* **zwak-stijgend** *genoemd als voor iedere* $k \in N$ *geldt:* $a_{k+1} \geq a_k$*. Sommige wiskundigen noemen zo'n rij ook wel gewoon 'stijgend'. Let dus op, wat iemand bedoelt!*
- *Een rij getallen* a*, zeg* $a_0, a_1, a_2, \ldots$*, wordt* **begrensd** *genoemd als er getallen L en R bestaan zodat voor iedere* $k \in N$ *geldt:* $L < a_k < R$*.*
- *Iedere zwak-stijgende begrensde rij positieve rationale getallen zien we hier als een* **positief reëel getal**.
- *Twee zwak-stijgende begrensde rijen positieve rationale getallen* a *en* b **representeren hetzelfde positieve reële getal** *precies als ze op den duur willekeurig dicht bij elkaar komen:* $a_k - b_k$ *kun je net zo dicht bij* 0 *krijgen als je wil als je* k *maar voldoende groot neemt. (Dit is geen waterdichte definitie, maar later worden we nauwkeuriger in het kader van limieten.)*
- *Een* **rationaal getal** x *kun je als reëel getal opvatten door hiervoor de rij* $x, x, x, x, x, \ldots$ *te nemen.*

Opgaven

opgave B.2 — *oefening*
Vermenigvuldig de elementen van de rij

$$0.01_{bin}, 0.010_{bin}, 0.0101_{bin}, 0.01010_{bin}, 0.010101_{bin}, \ldots$$

met 3_{dec}. Reken daarbij netjes binair. Wat zie je en hoe zie je hieraan dat de elementen van deze rij willekeurig dicht bij $\frac{1}{3}_{dec}$ komen?

opgave B.3 — *uitdager*
Bekijk de drie eerder genoemde rijen a, b en c die alle drie het reële getal $\frac{1}{3}$ representeren:

$$a_1 = 0.3_{dec}, a_2 = 0.33_{dec}, a_3 = 0.333_{dec}, \ldots, a_k = \sum_{i=1}^{k} 3 \cdot 10^{-k}, \ldots$$

$$b_1 = \frac{1}{3}, b_2 = \frac{1}{3}, b_3 = \frac{1}{3}, \ldots b_k = \frac{1}{3}, \ldots$$

$$c_1 = 0.01_{bin}, c_2 = 0.010_{bin}, c_3 = 0.0101_{bin}, c_4 = 0.01010_{bin}, \ldots, c_{2k-1} = c_{2k} = \sum_{i=1}^{k} 0.01_{bin}{}^{k}, \ldots$$

a. Bereken vanaf welke plaats (welk nummer) de elementen van rij a en rij b minder dan 10^{-12} verschillen. Anders gezegd: bereken een natuurlijk getal N zodat voor ieder groter nummer $k > N$ geldt dat $|a_k - b_k| < 10^{-12}$.
Het is niet erg om N wat hoger aan te geven dan strikt nodig is.
Bedenk daarbij hoe de rijen gedefinieerd zijn.
Je kunt natuurlijk desgewenst gebruik maken van de rekenmethoden voor afwijkingen van hoofdstuk A.

b. Bereken vanaf welke plaats (welk nummer) de elementen van de rijen b en c minder dan 10^{-12} verschillen.
Misschien vind je het handig te bedenken dat $2^{10} = 1024$, zogezegd, 2^{10} is 2.4% meer dan 10^3.

c. Bereken vanaf welke plaats (welk nummer) de elementen van de rijen a en c minder dan 10^{-12} verschillen.

opgave B.4 — *uitdager*

a. Laat (met behulp van de definitie!) zien dat de twee rijen

$$0.1_{bin} = \frac{1}{2},\ 0.11_{bin} = \frac{3}{4},\ 0.111_{bin} = \frac{7}{8},\ 0.1111_{bin} = \frac{15}{16},\ 0.11111_{bin} = \frac{31}{32},\ \ldots$$

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots$$

hetzelfde reële getal representeren (equivalent zijn).

b. Laat zien dat de twee rijen

$$0.9,\ 0.99,\ 0.999,\ 0.9999,\ 0.99999,\ \ldots$$

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots$$

equivalent zijn.

opgave B.5 — *oefening*
Geef zelf een geschikte definitie voor 'groter dan' in de positieve reële getallen: neem twee begrensde zwak-stijgende rijen en vertel in welke gevallen de eerste rij een reëel getal representeert dat groter is dan het getal dat door de tweede rij wordt gerepresenteerd.

B.3 Rekenen en vergelijken met positieve reële getallen

Met de zojuist gemaakte positieve reële getallen wil je natuurlijk ook rekenen. Dat gaat simpel: twee rijen optellen, of vermenigvuldigen doe je plaatsgewijs. Het is dan zaak te zien, dat equivalente rijen hetzelfde reële getal (dus equivalente rijen) opleveren bij optellen en vermenigvuldigen. Verder moet er nog even gecontroleerd worden dat de normale rekeneigenschappen gelden.
Bij het delen gaat het ook plaatsgewijs. In die nieuwe getallen kun je ook eenvoudig een orde-relatie 'groter dan' maken. Verder kun je, zoals je al gezien hebt, rationale getallen > 0 ook zien als reële getallen groter dan 0.

B.4 De reële getallen

We hebben nu alleen nog maar de positieve reële getallen. We missen nog de 0 en de negatieve reële getallen, maar die zijn snel gemaakt: we voegen nog een nieuw object 0 toe en bij ieder positief reëel getal maken we een nieuw object: het tegengestelde ervan. Dat is precies zoals je van de natuurlijke getallen de gehele getallen maakt en dan iets hebt waar je onbeperkt in kunt aftrekken, en natuurlijk ook optellen, vermenigvuldigen en delen (behalve delen door 0) en waarin de bekende lichaamseigenschappen gelden.
Ter herinnering:
Een lichaam K is een (getallen)verzameling, waarin optellen en vermenigvuldigen gedefinieerd zijn met de volgende eigenschappen:

a. De optelling is **commutatief**:

$$a + b = b + a \quad \text{voor alle } a, b \in K.$$

b. De optelling is *associatief*:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{voor alle } a, b, c \in K.$$

c. Er is een z.g. **nulelement**, genoteerd met 0, dat voldoet aan

$$a + 0 = 0 + a = a \quad \text{voor ieder element } a \text{ van } K$$

d. Bij elk element $a \in K$ is er een z.g. **tegengestelde** in K, genoteerd als $-a$, met de eigenschap

$$a + (-a) = 0$$

e. De vermenigvuldiging is commutatief:

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \text{voor alle } a, b \in K.$$

f. De vermenigvuldiging is **associatief**:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \text{voor alle } a, b, c \in K.$$

g. Er is een z.g. **eenelement**, genoteerd met 1, dat voldoet aan

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \text{voor ieder element } a \text{ van } K$$

We nemen ook aan dat $1 \neq 0$.

h. Voor elke $a \in K$ met $a \neq 0$ is er precies één $b \in K$ zodat $a \cdot b = 1$: d.w.z. a heeft een **inverse**, een **omgekeerde**.

i. De vermenigvuldiging is **distributief** over de optelling:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{en} \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a \quad \text{voor alle } a, b, c \in K.$$

We hebben hier zelfs een zogenaamd **geordend lichaam**: van elk tweetal verschillende getallen kun je aangeven welke de grootste is. Dat dat kan in de positieve reële getallen heb je al gezien in een voorgaande opgave. Bij de toevoeging van 0 en de negatieve getallen kun je op de voor de hand liggende wijze daarvan gebruik maken om algemeen twee reële getallen met elkaar te vergelijken. De details gaan we hier nu niet bekijken.

Opgaven

opgave B.6 — *facultatief*
Neem de rij decimale benaderingen van onder af voor een positief getal waarvan het kwadraat 2 is, zoals eerder in deze paragraaf vermeld. Noem die rij $\sqrt{2}$. Maak net zo de rij decimale benaderingen van onder af voor een positief getal waarvan het kwadraat 3 is en noem die rij $\sqrt{3}$. Vermenigvuldig nu beide rijen met elkaar en laat zien dat, als je die rij met zichzelf vermenigvuldigt, je een rij krijgt die het reële getal 6 representeert. Daarmee heb je dan in feite bewezen dat $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

B.5 De basiseigenschap van de reële getallen

Als je een zwak-stijgende begrensde rij rationale getallen neemt, krijg je het gevoel dat die “ergens blijft hangen” of “ergens naar toe gaat”. Bijvoorbeeld de rij $0.3, 0.33, 0.333, \ldots$ gaat naar $\frac{1}{3}$. Precieser gezegd: als je een bepaalde precisie kiest, dan zijn verschillen tussen de elementen vanaf een bepaalde plaats met het getal $\frac{1}{3}$ te verwaarlozen. Verderop zullen we zeggen dat die rij als limiet $\frac{1}{3}$ heeft.
We hebben al aan het begin van het hoofdstuk gezien dat dat *binnen* de rationale getallen mis kan gaan: de rij decimale benaderingen-van-onder van de lengte van de diagonaal in een vierkant met zijden van lengte 1 gaat niet naar een rational getal. Je zou denken: die gaat naar het reële getal $\sqrt{2}$. Maar dat is toch wel wat ingewikkelder: het speelt nu allemaal in de reële getallen. Die $\sqrt{2}$ is dus te zien als een zwak stijgende begrensde rij positieve rationale getallen. En zo moeten we die rationale getallen $1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \ldots$ nu ook als reële getallen opvatten, dus als rijen! Weliswaar eenvoudige rijen: het getal 1.414 kun je zien als de het reële getal dat gerepresenteerd wordt door de rij $1.414,\ 1.414,\ 1.414,\ 1.414,\ 1.414,\ \ldots$.
Als we de rij

$$1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ \ldots$$

zo opvatten als een rij reële getallen, krijgen we een oneindige rij van rijen. Die kun je bijvoorbeeld zó noteren:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1.4 & 1.4 & 1.4 & 1.4 & 1.4 & 1.4 & 1.4 & 1.4 & \ldots \\
1.41 & 1.41 & 1.41 & 1.41 & 1.41 & 1.41 & 1.41 & 1.41 & \ldots \\
1.414 & 1.414 & 1.414 & 1.414 & 1.414 & 1.414 & 1.414 & 1.414 & \ldots \\
1.4142 & 1.4142 & 1.4142 & 1.4142 & 1.4142 & 1.4142 & 1.4142 & 1.4142 & \ldots \\
1.41421 & 1.41421 & 1.41421 & 1.41421 & 1.41421 & 1.41421 & 1.41421 & 1.41421 & \ldots
\end{array}$$

Als je wilt weten waar zo'n rij van rijen naar toe gaat, is er een truc, die je misschien hier al wel een beetje kunt aanvoelen, maar die we hier niet nader gaan bekijken: de limiet is het reële getal dat gerepresenteerd wordt door de rij op de diagonaal vanaf linksboven. En hier zie je dat die diagonaal juist het reële getal $\sqrt{2}$ oplevert.
Zoiets geldt algemeen, maar we zullen dat niet bewijzen. Later komt deze stelling uitgebreid aan de orde.

(B.2) basiseigenschap van de reële getallen: *Iedere stijgende begrensde rij reële getallen heeft een (reële) limiet.*

In wezen saat hier dat de reële getallen **compleet** zijn, een vakterm die je niet hoeft te kennen, maar een belangrijke rol speelt bij theorie over limieten. Over limieten krijg je meer details in het vervolg en dan zullen we van deze stelling vaak gebruik maken.

hoofdstuk C

Machtsverheffen en logarithme

Omdat er vaak fouten en vergissingen gemaakt worden bij het rekenen met machten, herhalen we nu even kort de principes. Misschien kom je ook wel eens in de war met de rekenregels voor a^{b+c}, $a^{b\cdot c}$, $a^b + a^c$, $a^b \cdot a^c$, $(a^b)^c$, $(a+b)^c$, etc. Een goed idee is dan om even te kijken wat er gebeurt als je voor die variabelen natuurlijke getallen neemt, dan doorzie je het gemakkelijker. Dat gaan we hier ook doen.

C.1 Elementair rekenen met machten

- We kijken eerst eens als voorbeeld naar machten van 3:

(C.1) *voorbeeld:*

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
3^t	1	3	9	27	81	243	729	2187	6551

In de tabel van machten van 3 geldt:
optellen in de bovenste rij
levert vermenigvuldigen in de onderste rij.

Je kunt dat ook zo zien:

$$3^t \cdot 3^s = \underbrace{3 \cdot \ldots\ldots \cdot 3}_{t \text{ factoren } 3} \cdot \underbrace{3 \cdot \ldots\ldots \cdot 3}_{s \text{ factoren } 3} = \underbrace{3 \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot 3}_{t+s \text{ factoren } 3}$$

Dat geldt niet alleen als t en s natuurlijke getallen zijn, maar algemeen, voor alle reële getallen t en s. Voorbeeld: als gegeven is voor zekere t en s dat $3^t = 1000$ en dat $3^s = 44$, dan kun je 3^{t+s} gemakkelijk uitrekenen door die twee getallen te vermenigvuldigen: $3^{t+s} = 44000$.

einde voorbeeld

Dit kun je nu overzichtelijk zo zeggen:

$$t + s \overset{3^{\cdots}}{\longmapsto} 3^t \cdot 3^s$$

Macht van 3 nemen vertaalt optellen in vermenigvuldigen: bij optellen in de invoer levert vermenigvuldigen in de uitvoer.

- Onder in de tabel is iedere stap naar rechts vermenigvuldigen met 3, dus iedere stap naar links is delen door 3. Daarmee zie je hoe negatieve exponenten werken:

t	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
3^t	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	81

Dat geldt niet alleen als t een natuurlijk getal is; algemeen:

$$3^{-t} = \frac{1}{3^t}$$

Bij macht van 3 nemen geldt: tegengestelde nemen in de invoer levert omgekeerde nemen in de uitvoer.

- Omdat macht van 3 nemen optellen omzet in vermenigvuldigen, krijgen we bijvoorbeeld:

$$3^{5t} = 3^{t+t+t+t+t} = 3^t \cdot 3^t \cdot 3^t \cdot 3^t \cdot 3^t = (3^t)^5$$

Herhaald optellen wordt zo omgezet in herhaald vermenigvuldigen, dus in de invoer met 5 vermenigvuldigen levert de uitvoer tot de macht 5.
Dit werkt ook bij niet-gehele getallen i.p.v. 5:

$$3^{n \cdot t} = (3^t)^n$$

De volgorde bij vermenigvuldigen doet er niet toe, dus ook:

$$3^{n \cdot t} = (3^n)^t$$

Bij macht van 3 geldt: de invoer met a vermenigvuldigen levert de uitvoer tot de macht a.

- Daarmee kun je ook zien wat $3^{\frac{4}{5}}$ moet zijn:

$$\left(3^{\frac{4}{5}}\right)^5 = 3^{\frac{4}{5} \cdot 5} = 3^4 = 81$$

Dus blijkbaar is $3^{\frac{4}{5}}$ gelijk aan $\sqrt[5]{81}$:

$$3^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{81} = \sqrt[5]{3^4}$$

Algemeen:

$>$ *Als m en n natuurlijke getallen zijn, $n \neq 0$, dan*

$$3^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{3^m}$$

Voorbeeld voor het gebruik van die formule:

$$3^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{3^7} = \sqrt[4]{2187}$$

of fraaier:

$$3^{\frac{7}{4}} = 3^{1\frac{3}{4}} = 3^{1+\frac{3}{4}} = 3^1 \cdot 3^{\frac{3}{4}} = 3 \cdot \sqrt[4]{3^3} = 3 \cdot \sqrt[4]{27}$$

Het grondtal 3 is als voorbeeld genomen en kan door ieder ander positief getal vervangen worden.

Laat r een positief getal zijn. We zullen dat als *grondtal* gebruiken. Als t en s reële getallen zijn, dan:

- $r^0 = 1$ en $r^1 = r$
- $r^{t+s} = r^t \cdot r^s$
- $r^{t-s} = \dfrac{r^t}{r^s}$
- $r^{-t} = \frac{1}{r^t}$
- $r^{t\cdot s} = (r^t)^s$
- $\sqrt[s]{r^t} = r^{\frac{t}{s}}$ als s en t gehele getallen zijn en $s > 0$
- Als q ook een positief getal is, dan $(q \cdot r)^t = q^t \cdot r^t$ en $\left(\dfrac{q}{r}\right)^t = \dfrac{q^t}{r^t}$.

De tweede, derde, vierde en vijfde formule kunnen we mooier zeggen:

Bij machtsverheffen met vast grondtal geldt *"wordt alles erger"*:

- in de invoer optellen levert vermenigvuldigen in de uitvoer

$$t + s \overset{r^{\cdots}}{\longmapsto} r^t \cdot r^s$$

- in de invoer aftrekken levert delen in de uitvoer

$$t - s \overset{r^{\cdots}}{\longmapsto} \frac{r^t}{r^s}$$

- van de invoer tegengestelde nemen levert omgekeerde nemen van de uitvoer

$$-\,t \overset{r^{\cdots}}{\longmapsto} \frac{1}{r^t}$$

- in de invoer vermenigvuldigen met a levert tot de macht a nemen in de uitvoer

$$a \cdot t \overset{r^{\cdots}}{\longmapsto} (r^t)^a$$

Een bijzonder grondtal is e, dat een fundamentele rol speelt bij het differentiëren en integreren van machten.

(C.2) notatie: *In plaats van* e^x *schrijven we ook wel* $\exp(x)$.

opgave C.1 —
Vereenvoudig:

a. $(\frac{1}{c^{12}})^{-\frac{3}{4}}$

b. $(c^8)^{-\frac{1}{2}} + (c^8)^{\frac{1}{2}}$

c. $\dfrac{y^6(x^3y)^6 - x^6(x^3y^2)^4}{x^{36}(1-y^4)}$

d. $\sqrt[6]{t^5} \cdot \sqrt[3]{t^2}$

C.2 De andere kant uit: logaritme

We gaan hier rekenen aan een concreet voorbeeld, exponentiële groei van een bacteriekolonie als oefening in het werken met machten en logaritme.

(C.3) *voorbeeld:*

De tijd die een bacterie nodig heeft om aan deling toe te komen heet de delingstijd. Deze delingstijd verschilt per bacteriesoort en is daarnaast afhankelijk van de specifieke omstandigheden waarin de micro-organismen groeien.
Van een zekere bacteriesoort in een zeker milieu (voedingsvloeistof, voortdurend ververst en op een vaste temperatuur) is bekend dat de (gemiddelde) delingstijd 21 minuten is, dus dat de totale hoeveelheid iedere 21 minuten verdubbelt. We beginnen met een hoeveelheid van 3.0 mg bacterieën.

—? *vraag:* :

a. Met welke factor wordt de hoeveelheid per uur vermenigvuldigd?
b. Hoe lang duurt het tot zich 10 gram heeft gevormd?

antwoord:

a. Voordat we gaan rekenen, schatten we even: een uur is bijna 3 periodes, drie keer verdubbelen levert een factor 8, dus per uur zal de hoeveelheid bijna 8 keer zo groot worden. Met deze schatting gaan we later de uitkomst controleren.
Het gemakkelijkst kunnen we nu eerst even als tijdseenheid 21 minuten nemen. Na n periodes van 21 minuten hebben we een bacteriemassa m mg:

$$m = 3.0 \cdot 21^n$$

We willen natuurlijk wel in uren gaan rekenen. Laat t de verstreken tijd in uren zijn na n periodes. Dan is

$$t = \frac{21}{60}n$$

We kunnen nu n elimineren:

$$n = \frac{60}{21}t$$

dus

$$m = 3.0 \cdot 2^{\frac{60}{21}t} \tag{1}$$

Volgens $2^{a \cdot b} = (2^a)^b$ kunnen we formule (1) omzetten in:

$$m = 3.0 \cdot (2^{\frac{60}{21}})^t = 3.0 \cdot 7.245\,789\,314^t$$

dus per uur wordt de hoeveelheid met $7.245\,789\,314$ vermenigvuldigd. Dat klopt aardig met onze schatting. Dat grondtal zetten we nu meteen maar in het geheugen van de rekenmachine voor het vervolg.
Let op: volgens een eerder advies ronden we het grondtal niet af.

b. We moeten nu uitrekenen voor welke t geldt dat $m = 10\,000$:

$$10\,000 = 3.0 \cdot 7.245\,789\,341^t \tag{2}$$

$$7.245\,789\,341^t = 3\,333.333\,333$$

De massa is een exponentiële functie van de tijd; omgekeerd, de tijd uit de massa berekenen gaat met logaritme met hetzelfde grondtal:

$$t = {}^{7.245\,789\,341}\log(3\,333.333\,333)$$

We reduceren de log met dit onhandige grondtal tot een 10-log:

$$t = \frac{^{10}\log(3\,333.333\,333)}{^{10}\log(7.245\,789\,341)} = 4.1$$

Dus na ongeveer 4 uren en 6 minuten hebben we een massa van 10 gram.
Het kan ook anders: neem links en rechts de log in formule (2)

$$\log(7.245\,789\,341^t) = \log(3\,333.333\,333)$$

$$t \cdot \log(7.245\,789\,341) = \log(3\,333.333\,333)$$

$$t = \frac{^{10}\log(3\,333.333\,333)}{^{10}\log(7.245789342)} = 4.1$$

Even controleren in formule (1), de vroegste formule in dit verhaal:

$$3.0 \cdot 2^{\frac{60}{21} \cdot 4.1} = 1.008 \cdot 10^4$$

Let intussen op, hoe nauwkeurig je rekent en afrondt! Bij het controleren krijgen we 0.8% te veel: $1.008 \cdot 10^4$ i.p.v. $1.0000 \cdot 10^4$, dus een afwijking van minder dan 1%. De gegevens zijn echter minder nauwkeurig vast gelegd dan met 1%: bij de massa 3.0 mg is de maximale afwijking 0.05 gram, en dat is ongeveer 1.5% van 3 gram. Als we nu bij de controleberekening op een massa uitkomen die minder dan 1% afwijkt van het gewenste, dan hebben we nauwkeurig genoeg de tijd bepaald.

—¿

einde voorbeeld

C.3 Logaritme nemen is het omgekeerde van machtsverheffen

We kunnen een eerdere tabel van machten van 3 andersom noteren, dan krijgen we de tabel van de functie ${}^3\log(\ldots)$:

$$\begin{array}{|c|ccccccccc|c|}\hline 3^t & \frac{1}{81} & \frac{1}{27} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & u \\ \uparrow & & & & & & & & & & \downarrow \\ t & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & {}^3\log(u) \\ \hline \end{array}$$

De macht van 3 nemen en de 3-logaritme nemen zijn dus elkaars omgekeerde:

$$\begin{array}{ccc} t & \overset{3^{\cdots}}{\longmapsto} & 3^t \\ || & & || \\ {}^3\log(u) & \underset{{}^3\log(\ldots)}{\longleftarrow\!\!\!\mapsfrom} & u \end{array}$$

Als je eerst van links naar rechts gaat en dan van rechts naar links

$$t \overset{3^{\cdots}}{\longmapsto} 3^t \overset{{}^3\log(\ldots)}{\longmapsto} {}^3\log(3^t)$$

dan kom je weer bij het begin uit, dus

$${}^3\log(3^t) = t$$

Net zo, als je eerst van rechts naar links gaat en dan van links naar rechts

$$u \overset{{}^3\log(\ldots)}{\longmapsto} {}^3\log(u) \overset{3^{\cdots}}{\longmapsto} 3^{{}^3\log(u)}$$

dan kom je ook weer bij het begin uit, dus

$$3^{{}^3\log(u)} = u$$

Kortom

$$3^{{}^3\log(u)} = u \qquad \text{en} \qquad {}^3\log(3^t) = t$$

In plaats van 3 kun je ook een ander grondtal nemen. Algemeen geldt dat de macht van r nemen en de r-logaritme nemen precies omgekeerde bewerkingen zijn:

$$\boxed{r^{{}^r\log(u)} = u \quad \text{en} \quad {}^r\log(r^t) = t.}$$

C.4 Welke grondtallen kun je bij de logaritme gebruiken?

We nemen hier alleen machten van positieve getallen. Die zijn positief. Daarom kunnen we alleen over logaritmen met positieve grondtallen spreken en alleen over de logaritme van een positief getal als grondtal.
Er is één positief getal dat niet bruikbaar is: 1, want alle machten van 1 zijn 1, en dan kun je natuurlijk niet terugrekenen vanuit een ander getal.

> We spreken alleen over ${}^r\log(u)$ als u en r positief zijn en $r \neq 1$.

Er zijn drie bijzondere gevallen:

- Als er bij de log geen grondtal vermeld staat, bedoelen veel mensen grondtal 10.
- In sommige vakken speelt grondtal 2 een bijzondere rol en dan wordt afgesproken dat $\log(x) = {}^2\log(x)$.
- Als het grondtal e is (met $e = 2.71828182846$), dan noteren we de logaritme als ln. Sommige mensen noteren echter “log” ipv “ln”.

Het is geen slecht idee bij log altijd het grondtal te noteren, tenzij je zeker weet dat er geen verwarring bij je zelf of bij anderen kan ontstaan.
De essentiële eigenschap van de logaritme met grondtal e is, dat de afgeleide van deze functie $x \mapsto \frac{1}{x}$ is. Verder is nog van belang:

(C.4) lemma: *Als* $x > 1$ *dan* $0 < \ln(x) < x - 1$.

C.5 De rekeneigenschappen van de logaritme

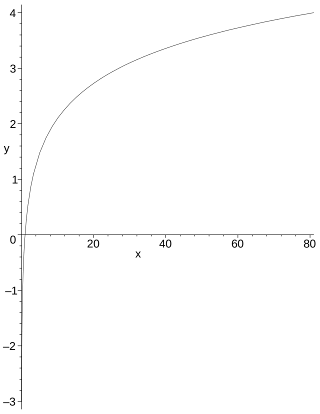


Fig C.1 $y = {}^3\log(x)$

Je kent allerlei eigenschappen van machtsverheffen. Die kunnen vertaald worden naar logaritme. Dat gaan we hier doen omdat het kan helpen die eigenschappen op den duur vast te houden. Het enige dat hier echt van belang is, is dat je die rekeneigenschappen goed in je geheugen verankert. Of je onderstaande ideeën daarbij wilt gebruiken, moet je zelf weten. We gaan weer werken met machten van 3 en omgekeerd dus met de ${}^3\log$.

- Macht van 3 nemen zet optellen om in vermenigvuldigen:

$$t + s \overset{3^{\cdots}}{\longmapsto} 3^t \cdot 3^s \quad \text{oftewel} \quad 3^{t+s} = 3^t \cdot 3^s$$

dus bij ${}^3\log$ nemen wordt vermenigvuldigen omezet in optellen:

$$u \cdot w \overset{{}^3\log(\ldots)}{\longmapsto} {}^3\log(u) + {}^3\log(w) \quad \text{oftewel} \quad {}^3\log(u \cdot w) = {}^3\log(u) + {}^3\log(w)$$

- Macht van 3 nemen zet a-voud nemen pm in tot-de-macht-a-nemen:

$$a \cdot t \overset{3^{\cdots}}{\longmapsto} (3^t)^a \quad \text{oftewel} \quad 3^{a \cdot t} = (3^t)^a$$

dus ${}^3\log$ nemen zet iets tot de macht a om in het a-voud (van de log er van):

$$u^a \overset{{}^3\log(\ldots)}{\longmapsto} a \cdot {}^3\log(u) \quad \text{oftewel} \quad {}^3\log(u^a) = a \cdot {}^3\log(u)$$

- Macht van 3 nemen zet aftrekken om in delen:

$$t - s \overset{3^{\cdots}}{\longmapsto} \frac{3^t}{3^s} \quad \text{oftewel} \quad 3^{t-s} = \frac{3^t}{3^s}$$

dus bij ${}^3\log$ nemen geldt: in de invoer delen levert aftrekken in de uitvoer:

$$\frac{u}{w} \overset{{}^3\log(\ldots)}{\longmapsto} {}^3\log(u) - {}^3\log(w) \quad \text{oftewel} \quad {}^3\log(\frac{u}{w}) = {}^3\log(u) - {}^3\log(w)$$

- Macht van 3 nemen zet tegengestelde om in omgekeerde:

$$-t \overset{3^{\cdots}}{\longmapsto} \frac{1}{3^t} \quad \text{oftewel} \quad 3^{-t} = \frac{1}{3^t}$$

dus bij ${}^3\log$ nemen geldt: in de invoer omgekeerde nemen levert tegengestelde nemen in de uitvoer:

$$\frac{1}{u} \overset{{}^3\log(\ldots)}{\longmapsto} -{}^3\log(u) \quad \text{oftewel} \quad {}^3\log(\frac{1}{u}) = -{}^3\log(u)$$

- Omdat $3^0 = 1$ is ${}^3\log(1) = 0$

3^t	$\frac{1}{81}$ $\frac{1}{27}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{3}$ 1 3 9 27 81	$+$ $-$ tegengestelde $\ldots * a$	u
$\uparrow$			$\downarrow$
t	-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4	$*$ $/$ omgekeerde $(\ldots)^a$	${}^3\log(u)$

Ook voor andere grondtallen dan 3 krijg je hetzelfde.
Zoals machtsverheefen alles "erger maakt", zo maakt logaritme nemen alles gemakkelijker.
De rekeneigenschappen van log zijn:

Laat r een positief getal ongelijk aan 1 zijn. We zullen dat als *grondtal* gebruiken. Als u en w positieve reële getallen zijn en t een reëel getal , dan:

- ${}^r\log(r^t) = t$
- $r^{{}^r\log(u)} = u$
- ${}^r\log(u \cdot w) = {}^r\log(u) + {}^r\log(w)$
- ${}^r\log(\frac{u}{w}) = {}^r\log(u) - {}^r\log(w)$
- ${}^r\log(\frac{1}{w}) = -{}^r\log(w)$
- ${}^r\log(u^w) = w \cdot {}^r\log(u)$

C.6 Logaritmen in verschillende grondtallen omrekenen

Op rekenmachines zit doorgaans een toets `LOG` voor ${}^{10}\log$ en nog een toets `LN` voor de logaritme met dat speciale grondtal $e \approx 2.71828182846$. Hoe reken je nu bijvoorbeeld de ${}^3\log$ van een getal uit? Dat gaat met de volgende formule:

$$\boxed{{}^r\log(u) = \frac{{}^{10}\log(u)}{{}^{10}\log(r)}}$$

Dus bijvoorbeeld:

$${}^3\log(u) = \frac{{}^{10}\log(u)}{{}^{10}\log(3)}$$

Algemener geldt, als r en g positieve getallen ongelijk aan 1 zijn:

$$\boxed{{}^r\log(u) = \frac{{}^g\log(u)}{{}^g\log(r)}}$$

Voor het differentiëren van logaritmen (zie les 7) moet je steeds omzetten naar de natuurlijke logaritme, dus met grondtal e; dat gaat net zo:

$$\boxed{{}^r\log(u) = \frac{\ln(u)}{\ln(r)}}$$

Opgaven

opgave C.2 —
Bereken zonder rekenmachine en schrijf op hoe je rekent:

a. ${}^3\log(3^{20})$

b. ${}^3\log(\sqrt[5]{81})$

c. ${}^3\log(9^{-15})$

d. $3^{{}^3\log(0.3)}$

e. $81^{{}^3\log(5)}$

opgave C.3 —
Gegeven is de formule

$$q = 3 \cdot {}^{10}\log(t) - {}^{10}\log(t-1) - 2 \cdot {}^{10}\log(t+4)$$

Voor welke t is $q = 0$?

opgave C.4 —
Los op: voor welke $x \in R$:

$${}^8\log(x+4) - {}^8\log(x+\frac{4}{3}) = {}^8\log(2) \cdot \left({}^8\log(x+8) - {}^8\log(x)\right)$$

Advies: als je denkt dat dit (te?) moeilijk is, ga dan gewoon er wat mee doen, dan zul je zien dat het best gaat (als je geen vergissingen maakt).

opgave C.5 —
Los de volgende vergelijkingen op:

a. $?x \in R: \quad {}^5\log(x) = {}^{25}\log(7)$

b. $?a \in R: \quad {}^4\log(a) = {}^2\log(3)$

opgave C.6 —
Los op: $?x \in R: {}^2\log(x-1) + 3 = {}^2\log(3x+1)$.

C.7 Machten omrekenen naar e-machten

Om machten met de variabele in de exponent te kunnen differentiëren moet je die eerst omzetten in een e-macht. Dat doe je door eenvoudigweg eerst de ln te nemen (en die uit te werken m.b.v. de rekenformules voor logaritme) en van het resultaat weer de e-macht: dat levert samen immers weer hetzelfde op als wat je al had, alleen nu met een misschien wat meet ingewikkelde formule, maar wel een die je voor differentiëren kunt gebruiken.

(C.5) *voorbeeld:*

$$(x+1)^{x-2} = \exp\left(\ln\left((x+1)^{x-2}\right)\right) = \exp\left((x-2)\ln(x+1)\right) = e^{(x-2)\ln(x+1)}$$

einde voorbeeld

hoofdstuk D

Goniometrische functies

Goniometrische functies zijn o.a. van belang voor meetkundige berekeningen en voor periodieke processen, zoals geluidstrillingen. Hier volgt een beknopte herhaling van dat onderwerp.

D.1 Hoeken

Een **hoek** kun je zien als twee halve lijnen met gemeenschappelijk eindpunt. Het gaat daarbij om het 'binnengebied'. Om dit en het volgende wiskundig netjes te bespreken, zouden we hier te ver moeten afdwalen; dat zou ons doel voorbij schieten, dus gaan we nu maar net zo losjes verder. In dit kader kunnen hoeken niet groter zijn dan een gestrekte hoek. Twee hoeken zijn even groot als ze op elkaar passen. Een gestrekte hoek krijg je als de twee halve lijnen in elkaars verlengde liggen. Je kunt (de grootte van) twee hoeken bij elkaar optellen door de één zó te verplaatsen dat een halve lijn van de ene hoek precies op een halve lijn van de andere hoek ligt en hun binnengebieden niet overlappen; dat gaat goed alleen als het resultaat niet 'voorbij' een gestrekte hoek gaat. Je kunt echter ook denken aan rotaties en dan is die grens niet nodig.

Een gebruikelijke maat voor hoeken is de graad: een gestrekte hoek is 180°. Alternatief, en normaal gebruikelijk in de calculus is een andere maat: de **radiaal**. Je kunt een hoek ook meten door de lengte van de cirkelboog te bepalen die hoort bij die hoek in het middelpunt van een cirkel met straal 1. Een gestrekte hoek levert daarbij een halve cirkel; de lengte daarvan is $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 1 = \pi$. Dus een hoek van 180° is ook een hoek van π radialen. Een hoek van 1 radiaal is dus een hoek van $\frac{180}{\pi}^\circ \approx 57.3^\circ$. We zullen hier standaard in radialen rekenen.

D.2 Rechthoekige driehoeken en de functies sin, cos en tan

In een driehoek kun je drie hoeken zien door de zijden te verlengen. Laat een driehoek ABC gegeven zijn waarvan hoek A gelijk is aan x radialen en hoek B recht, dus $\frac{1}{2}\pi$ radialen. (Let op: x is een (reëel) getal, x radialen is een hoekgrootte.) Door die beide hoeken ligt de vorm van die driehoek vast: alle driehoeken met die gegevens zijn onderling gelijkvormig, dus de verhoudingen van de lengten van de zijden liggen hiermee vast. Die verhoudingen gebruiken we nu voor de definities van de functies sin, cos en tan:

$$\boxed{\begin{aligned}
\sin(x) &:= \frac{BC}{AC} = \frac{\text{lengte overstaande zijde}}{\text{lengte schuine zijde}} \\
\cos(x) &:= \frac{AB}{AC} = \frac{\text{lengte aanliggende zijde}}{\text{lengte schuine zijde}} \\
\tan(x) &:= \frac{BC}{AB} = \frac{\text{lengte overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}}
\end{aligned}}$$

De functies sin, cos en tan werken dus niet op hoeken, maar op reële getallen tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$. In de volgende paragraaf zullen we deze functies uitbreiden, zodat sin en cos werken op alle reële getallen en tan op bijna alle reële getallen.

Uit de definities en de stelling van Pythagoras volgt onmiddellijk:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{voor alle } x \in < 0, \tfrac{1}{2}\pi >$$

$$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1 \quad \text{voor alle } x \in < 0, \tfrac{1}{2}\pi >$$

Enkele bekende functiewaarden:

$$\sin(\tfrac{1}{6}\pi) = \tfrac{1}{2}, \quad \cos(\tfrac{1}{6}\pi) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \tan(\tfrac{1}{6}\pi) = \tfrac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin(\tfrac{1}{3}\pi) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos(\tfrac{1}{3}\pi) = \tfrac{1}{2}, \quad \tan(\tfrac{1}{3}\pi) = \sqrt{3}$$

$$\sin(\tfrac{1}{4}\pi) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos(\tfrac{1}{4}\pi) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan(\tfrac{1}{4}\pi) = 1$$

Opgave

opgave D.1 — *oefening*
Gegeven is een regelmatige 5-hoek met zijdelengte gelijk aan 10. Bereken de lengte van de diagonalen in decimale benadering met een nauwkeurigheid van 3 cijfers na de punt.

D.3 Uitbreiding van de functies sin, cos en tan m.b.v. de eenheidscirkel

Neem het platte vlak met de gebruikelijke coördinaatassen. Je kunt het punt $(1, 0)$ roteren linksom over een hoek van x radialen. Het punt dat je krijgt ligt weer op afstand 1 van de oorsprong, dus op de cirkel met straal 1 om de oorsprong. De coördinaten van dat punt, voor het geval $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ zijn dan $(\cos(x), \sin(x))$.
We zullen deze constructie nu gebruiken om die functies **sin** en **cos** uit te breiden tot de reële getallen: we definiëren die functies zo dat voor iedere x de coördinaten van het punt bij rotatie van $(1, 0)$ om de oorsprong (linksom voor positieve x) gelijk zijn aan $(\cos(x), \sin(x)$. Daarbij zullen we roteren over een negatieve hoek opvatten als rechtsom roteren.
Uit deze constructie lees je onmiddellijk af:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \text{en} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

Bovenstaande twee formules zeggen dat sin en cos periodiek zijn met periode 2π.

$$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k \cdot \pi \quad \text{als } k \in Z$$

$$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \quad \text{als } k \in Z$$

Het is ook duidelijk dat de functiewaarden van sin en cos in $[-1, 1]$ liggen.
Je ziet met Pythagoras weer dat ook voor die uitbreiding geldt

$$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1 \quad \text{voor alle } x \in R$$

Verder definieren we **tan** als

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{als } \cos(x) \neq 0$$

(D.1) *voorbeeld:*

De ongelijkheid $?x \in R: \quad \sin(x) > -0.7$ levert als oplossing $\arcsin(-0.7) + 2k\pi < x < \pi - \arcsin(-0.7) + 2k\pi$. Denk aan de eenheidscirkel en de definitie van sin, maar let ook op, dat je de goede grenzen neemt, met name dat $\arcsin(-0.7) < \pi - \arcsin(-0.7)$.

einde voorbeeld

Opgave

opgave D.2 — *oefening*
Gegeven is dat $\cos(x) = \frac{2}{3}$ en $x \in < 3\pi, 4\pi >$. Bereken exact, dus zonder afgeronde decimale benaderingen, $\sin(x)$ en $\tan(x)$.

opgave D.3 — *ongelijkheid*
Los de volgende ongelijkheden op (tip: kijk goed naar de eenheidscirkel of naar de grafieken!):

a. $\sin(x) > -0.5$

b. $\cos(x) > -0.5$

c. $\tan(x) > -1$

D.4 Symmetrieeigenschappen van de goniometrische functies

Met enkele symmetrieën van de eenheidscirkel lezen we de belangrijkste symmetrie-eigenschappen van de functies sin, cos en tan af.

- Spiegelen in de horizontale as:
  - $>$ rotatiehoek wordt tegengesteld
  - $>$ eerste coördinaat blijft gelijk
  - $>$ tweede coördinaat wordt het tegengestelde

  dus

$$\boxed{\begin{array}{c}\sin(-x) = -\sin(x)\\ \cos(-x) = \cos(x)\\ \tan(-x) = -\tan(x)\end{array}}$$

- Spiegelen in de vertikale as:
  - $>$ rotatiehoek x radialen wordt $\pi - x$ radialen
  - $>$ eerste coördinaat wordt het tegengestelde
  - $>$ tweede coördinaat blijft gelijk

  dus

$$\boxed{\begin{array}{c}\sin(\pi - x) = \sin(x)\\ \cos(\pi - x) = -\cos(x)\\ \tan(\pi - x) = -\tan(x)\end{array}}$$

- Puntspiegelen in de oorsprong:
  - $>$ rotatiehoek x radialen wordt $\pi + x$ radialen
  - $>$ eerste coördinaat wordt het tegengestelde
  - $>$ tweede coördinaat het tegengestelde

  dus

$$\boxed{\begin{array}{c} \sin(\pi + x) = -\sin(x) \\ \cos(\pi + x) = -\cos(x) \\ \tan(\pi + x) = \tan(x) \end{array}}$$

- Spiegelen in de lijn door de oorsprong met rchting $\frac{1}{4}\pi$:
  - $>$ rotatiehoek x radialen wordt $\frac{1}{2}\pi - x$ radialen
  - $>$ eerste coördinaat en tweede coördinaat worden verwisseld

  dus

$$\boxed{\begin{array}{c} \sin(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos(x) \\ \cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \sin(x) \\ \tan(\frac{1}{2}\pi - x) = \frac{1}{\tan(x)} \end{array}}$$

Je kunt deze symmetrieeigenschappen gebruiken voor het oplossen van vergelijkingen:

$$\sin(x) = \sin(y) \quad \Leftrightarrow \quad x = y + 2k\pi \quad \text{of} \quad x = \pi - y + 2k\pi \quad \text{als } k \in Z$$

$$\cos(x) = \cos(y) \quad \Leftrightarrow \quad x = y + 2k\pi \quad \text{of} \quad x = -y + 2k\pi \quad \text{als } k \in Z$$

$$\tan(x) = \tan(y) \quad \Leftrightarrow \quad x = y + k\pi \quad \text{als } k \in Z$$

Let er dus op: de periode van sin en cos is 2π, maar de periode van tan is π.

D.5 Goniometrische vergelijkingen en de inverse goniometrische functies

Omdat de goniometrische functies iedere waarde voor (oneindig) veel verschillende invoergetallen aannemen, is er geen sprake van complete inverse functies. Alleen door beperkingen kun je inverse functies maken. Die zijn als volgt gedefinieerd:

(D.2) definitie:

- *De functie* **arcsin** *werkt op* $[-1, 1]$ *en levert iets af in* $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$.

$$\text{Als } -\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi \text{ dan } \arcsin(\sin(x)) = x$$

- *De functie* **arccos** *werkt op* $[-1, 1]$ *en levert iets af in* $[0, \pi]$.

$$\text{Als } 0 \leq x \leq \pi \text{ dan } \arccos(\cos(x)) = x$$

- *De functie* **arctan** *werkt op* R *en levert iets af in* $< -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi >$.

$$\text{Als } -\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi \text{ dan } \arctan(\tan(x)) = x$$

Je kunt die functies gebruiken in combinatie met de symmetrieeigenschappen voor het oplossen van vergelijkingen:

$$\sin(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \arcsin(a) + 2k\pi \quad \text{of} \quad x = \pi - \arcsin(a) + 2k\pi \quad \text{als } k \in Z$$

$$\cos(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \arccos(a) + 2k\pi \quad \text{of} \quad x = -\arccos(a) + 2k\pi \quad \text{als } k \in Z$$

$$\tan(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \arctan(a) + k\pi \quad \text{als} \quad k \in Z$$

Opgaven

opgave D.4 — *oefening*

a. Voor welke $x \in R$ geldt: $\sin(x) = \sin(5)$?

b. Voor welke $x \in R$ geldt: $\sin(2x - 1) = \sin(2 - x)$?

c. Voor welke $x \in R$ geldt: $\cos(x) = \cos(5)$?

d. Voor welke $x \in R$ geldt: $\sin(x) = \cos(5)$?

e. Voor welke $x \in R$ geldt: $\tan(x) = \tan(5)$?

opgave D.5 — *oefening*

Voor welke $x \in R$ geldt $6(\cos(x))^2 + 5\cos(x) = 4$?
Je mag zo nodig decimale benaderingen in 3 cijfers nauwkeurig geven.

D.6 Meetkundige berekeningen m.b.v. goniometrische functies

Neem een driehoek ABC. Noem

$$a := \text{BC}, \quad b := \text{AC}, \quad c := \text{AB}$$

$$\alpha \text{ radialen} := \text{grootte hoek A}, \quad \beta \text{ radialen} := \text{grootte hoek B}, \quad \gamma \text{ radialen} := \text{grootte hoek C}$$

Dan gelden

(D.3) sinusregel en cosinusregel:

- *sinusregel:*

$$\boxed{\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}}$$

- *cosinusregel:*

$$\boxed{2\,a\,b\,\cos(\gamma) = a^2 + b^2 - c^2}$$

en natuurlijk net zo:

$$2\,a\,c\,\cos(\beta) = a^2 + c^2 - b^2$$

$$2\,b\,c\,\cos(\alpha) = b^2 + c^2 - a^2$$

Opgave

opgave D.6 —
In driehoek ABC zijn de lengten van de zijden gegeven: AB=3, BC=5, AC=7. Bereken de hoeken van die driehoek in decimale benadering in 3 cijfers nauwkeurig.

D.7 * Nog enkele formules

Dubbele hoekformules:

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(2x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 = 2(\cos(x))^2 - 1 = 1 - 2(\sin(x))^2$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-(\tan(x))^2}$$

Somformules:

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

(D.4) *voorbeeld:*

Los op: $?x \in R: \quad \sin(x-1) = \cos(3x+1)$.

Uitwerking: we vervangen $\cos(a)$ door $\sin(\frac{1}{2}\pi - a)$ (het kan ook anders, als je wilt):

$$\sin(x-1) = \sin(\frac{1}{2}\pi - (3x+1))$$

$$\sin(x-1) = \sin(\frac{1}{2}\pi - 3x - 1))$$

Nu passen we de regel toe: $\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow a = b + 2k\pi \quad \text{of} \quad a = \pi - b + 2k\pi$:

$$x - 1 = \frac{1}{2}\pi - 3x - 1 + 2k\pi \quad \text{of} \quad x - 1 = \pi - (\frac{1}{2}\pi - 3x - 1) + 2k\pi$$

Uitwerken levert:

$$x = \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi \quad \text{of} \quad x = -\frac{1}{4}\pi - 1 + k\pi \quad \text{met} \quad k \in Z$$

einde voorbeeld

Opgaven

opgave D.7 — *oefening*

a. Los op: $x \in R$: $\tan(4x) < 1$

b. Los op: $x \in R$: $\cos(\frac{1}{2}x) > \frac{1}{2}$

opgave D.8 — *oefening*

Los de volgende vergelijkingen in $x \in R$ op:

a. $\sin(x) = \sin(10)$

b. $\sin(x - 2) = \cos(3 - x)$

c. $\tan(x - 1) = 2\sin(x - 1)$

hoofdstuk E

Complexe e-machten en eenheidswortels

E.1 De standaardrepresentatie van complexe getallen

De eenvoudigste manier om complexe getallen te schrijven is: een som van een reëel getal en i keer een reëel getal:

$$a + bi \quad \text{met} \quad a, b \in R$$

Die manier is perfect geschikt voor optellen en aftrekken:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Deze representatie is ook best bruikbaar voor een vermenigvuldiging en een deling:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ax - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{c^2 + d^2}$$

Voor machtsverheffen is deze representatie onbruikbaar.
Als $z = a + bi$ en a en b zijn reële getallen, dan

$a = \mathrm{Re}(a)$ de **reële component** van z

$b = \mathrm{Im}(a)$ de **imaginaire component** van z

$\overline{a + bi} = a - bi$ de complex **geconjugeerde**

$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ de absolute waarde oftewel lengte van z

E.2 Het argument van een complex getal

Ieder complex getal behalve 0 heeft een **argument**, een getal tussen $-\pi$ en π dat gelijk is aan de hoekgrootte in radialen van de richting van z t.a.v. de positieve reële as, linksom gemeten:

$$-\pi < \arg(z) \leq \pi$$

$$\tan(\arg(z)) = \frac{b}{a}$$

Pas op:

$$\arg(z) = \arctan(\frac{b}{a}) \quad \text{of} \quad \arg(z) = \arctan(\frac{b}{a}) + \pi \quad \text{of} \quad \arg(z) = \arctan(\frac{b}{a}) - \pi$$

Kijk naar plaatjes: waar ligt z?

Opgave

opgave E.1 —
Bereken de argumenten (in 4 decimalen nauwkeurig) van

a. $1+3i$
b. $1-3i$
c. $-1+3i$
d. $-1-3i$

E.3 Representatie van een complex getal met absolute waarde en argument

Ieder complex getal ongelijk aan 0 kun je aanduiden door zijn absolute waarde (lengte) en argument te geven.
Vermenigvuldigen gaat dan door de absolute waarden met elkaar te vermenigvuldigen en de argumenten op te tellen. Delen gaat door de absolute waarden te delen en de argumenten af te trekken. In beide gevallen moet je wellicht corrigeren door 2π van de som van de argumenten af te trekken of 2π bij het verschil van de argumenten op te tellen om weer tussen $-\pi$ en π te komen.
Machtsverheffen met reële exponenten gaat door de absolute waarde tot die macht te verheffen en het argument met de exponent te vermenigvuldigen, en ook hier weer zo nodig te corrigeren door een veelvoud van 2π er bij op te tellen of er af te trekken.
De geconjugeerde krijg je door het argument in het tegengestelde om te zetten: spiegelen in de reële as!
Als we een complex getal z met absolute waarde r en argument φ willen noteren, doen we dat vaak als volgt op basis van de standaardrepresentatie:

$$\boxed{z = r\cdot(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))}$$

In principe kies je hier voor φ het argument, dus een getal φ zodat $-\pi<\varphi\le\pi$, maar voor de hier gegeven formule maakt het niet uit als je er een veelvoud van 2π naast zit. Als je deze representatie *voor machtsverheffen* wilt gebruiken, *moet het wel!*
Deze representatie is onbruikbaar voor optellen en aftrekken, wel geschikt dus voor vermenigvuldigen en delen. Als r,s,φ en ψ reële getallen zijn en $r>0, s>0$, dan

$$(r\cdot(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)))\cdot(s\cdot(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))) = rs\cdot(\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)))$$

$$\frac{r\cdot(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))}{s\cdot(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))} = \frac{r}{s}\cdot(\cos(\varphi-\psi)+i\sin(\varphi-\psi))$$

Machtsverheffen met *reële exponent* (!!!) a:

$$(r\cdot(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)))^a = r^a\cdot(\cos(a\cdot\varphi)+i\sin(a\cdot\varphi)) \quad \text{mits} \quad -\pi<\varphi\le\pi$$

Als $r>0$ en $r'>0$ zoals het hoort, dan

$$r\cdot(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)) = r'\cdot(\cos(\varphi')+i\sin(\varphi))$$

precies als $r=r'$ en $\varphi-\varphi'$ is een *geheel* veelvoud van 2π. Dat laatste noteren we ook als

$$\varphi\equiv\varphi' \pmod{2\pi}$$

Opgave

opgave E.2 —

Bereken $\left((1+i)^5\right)^{\frac{2}{3}}$ (desgewenst in decimale benadering, met een nauwkeurigheid van 4 decimalen).

E.4 Representatie van complexe getallen als complexe e-machten.

Een variant op het voorgaande is representatie van complexe getallen ongelijk aan 0 als **complexe e-macht**:

(E.1) definitie:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Als } p \text{ en } q \text{ reëel zijn, dan}\\ e^{p+qi} = e^p \cdot (\cos(q) + i\sin(q))\end{array}}$$

Als $\rho = \ln(|z|)$ en φ het argument van z, dan

$$z = \exp(\rho + i\varphi) = e^{\rho+i\varphi}$$

waarbij dus ρ een reëel getal is e^ρ de lengte (absolute waarde) van z is en φ het argument van z.
Als ρ en φ reële getallen zijn, dan

$$e^{\rho+i\varphi} = e^{\rho'+i\varphi'} \Leftrightarrow \rho = \rho' \quad \text{en} \quad \varphi \equiv \varphi' \pmod{2\pi}$$

Vermenigvuldigen en delen, gewoon zoals je verwacht bij e-machten:

$$e^{\rho+i\varphi} \cdot e^{\sigma+i\psi} = e^{(\rho+\sigma)+i(\varphi+\psi)}$$

$$\frac{e^{\rho+i\varphi}}{e^{\sigma+i\psi}} = e^{(\rho-\sigma)+i(\varphi-\psi)}$$

Machtsverheffen tot een reëel getal van een e-macht gaat ook ‘normaal’ *mits je met het argument werkt*:

$$\left(e^{\rho+i\varphi}\right)^a = e^{a\cdot\rho+ia\cdot\varphi} \quad \text{mits } -\pi < \varphi \leq \pi \text{ en } a \in R$$

Let op: $a \cdot \varphi$ hoeft niet het argument van het resultaat te zijn: misschien moet je eerst nog een aantal keren 2π er bij optellen of aftrekken!

Opgave

opgave E.3 — *oefening*

a. Bereken (in standaardnotatie, met decimale benadering in 4 cijfers nauwkeurig) e^{-3+4i}.

b. Bereken (in standaardnotatie, met decimale benadering in 4 cijfers nauwkeurig) een getal z zodat $e^z = -3+4i$

E.5 Eenheidswortels

In allerlei toepassingen spelen de **eenheidswortels** een rol. Laat n een natuurlijk getal > 1 zijn. Dan

(E.2) definitie: *De n-de eenheidswortels zijn de oplossingen van de vergelijking*

$$?z \in C : \quad z^n = 1$$

dat zijn de getallen

- *met absolute waarde r zodat $r^n = 1$, dus met $r = 1$ (bedenk dat $r > 0$!) en*
- *met argument φ zodat $n \cdot \varphi$ een veelvoud van 2π is, dus $n \cdot \varphi = 2k \subset$, dus $\varphi = \frac{k}{n} \cdot 2\pi$; samen met de voorwaarde $-\pi < \varphi \leq \pi$ krijg je precies n verschillende oplossingen: neem*

$$-\frac{1}{2}n < k \leq \frac{1}{2}n$$

Die oplossingen noemen we de n-de **eenheidswortels**.

Vaak schrijven we de n-de eenheidswortels als

$$1, e^{\frac{1}{n}\cdot 2\pi i}, e^{\frac{2}{n}\cdot 2\pi i}, e^{\frac{3}{n}\cdot 2\pi i}, \ldots, e^{\frac{n-1}{n}\cdot 2\pi i}$$

Let wel op met deze notatie: als $k > \frac{1}{2}n$, dan heeft $e^{\frac{k}{n}\cdot 2\pi}$ niet argument $\frac{k}{n} \cdot 2\pi$, maar $(\frac{k}{n} - 1) \cdot 2\pi$.

Een belangrijke eigenschap van de eenheidswortels:

(E.3) stelling: *De som van de n-de eenheidswortels is 0.*

Dat is gemakkelijk te zien aan de rotatiesymmetrie van het plaatje van de n-de eenheidswortels. Bijpassend kun je dat ook bewijzen. Laat S die som zijn. We gaan die som vermenigvuldigen met een eenheidswortel (niet 1, zeg $e^{\frac{1}{n}\cdot 2\pi i}$):

$$e^{\frac{1}{n}\cdot 2\pi i} \cdot S = e^{\frac{1}{n}\cdot 2\pi i} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}\cdot 2\pi i} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k+1}{n}\cdot 2\pi i} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}\cdot 2\pi i}$$

Nu is $e^{\frac{n}{n}\cdot 2\pi i} = e^{2\pi i} = e^{\frac{0}{n}\cdot 2\pi i}$, dus

$$e^{\frac{1}{n}\cdot 2\pi i} \cdot S = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}\cdot 2\pi i} = S$$

We zien:

$$e^{\frac{1}{n}\cdot 2\pi i}.cdotS = S$$

en omdat $e^{\frac{1}{n}\cdot 2\pi i} \neq 1$ is dus $S = 0$.

hoofdstuk F

Floating point numbers op computers

F.1 * Puntgetallen omrekenen van decimaal naar binair

(F.1) *voorbeeld:*

Stel dat je een binaire benadering in 8 cijfers na de punt zoekt van 3.1_{dec}. Vóór de punt komt 11, dus we krijgen iets van de vorm

$$11.12345678\,_{bin}$$

waarbij $1, \ldots 8$ binaire cijfers zijn (0 of 1). Dus

$$0.12345678\,_{bin} \approx 0.1_{dec}$$

Als we de punt 8 plaatsen naar rechts schuiven krijgen we een 256 keer zo groot getal:

$$12345678\,_{bin} \approx 25.6_{dec}$$

Links staat een geheel getal. We ronden rechts die 25.6 af op $26_{dec} = 11010_{bin} = 00011010_{bin}$ Resultaat:

$$3.1_{dec} \approx 11.00011010_{bin}$$

einde voorbeeld

Opgave

opgave F.1 — *oefening*

Bereken een binaire benadering in 8 cijfers van $\sqrt{3}$.

F.2 * Binaire codering van floating point numbers

Een binair cijfer wordt ook wel ‘bit’ genoemd. Voor ‘floating point numbers’ wordt op computers doorgaans het volgende formaat gebruikt of iets dat daarop lijkt: het getal schrijven we nu even in scientific notation: $\pm 1.123 \ldots \mathrm{n}\,_{bin} \times 2^k$. De representatie van 0 komt straks apart aan de orde.

- één bit geeft $+$ of $-$ aan, dus of het een positief of negatief getal is, het ‘sign bit’;
- dan wordt een aantal bits gebruikt om een natuurlijk getal, de k uit bovenstaande formule, te representeren, dus de exponent van die macht 2^k. Dat getal k kan 0, positief of negatief zijn; de norm voor de representatie is hier, dat bij die exponent een vast getal, de ‘bias’, wordt opgeteld en het resultaat op de normale manier binair wordt weergegeven.
- en dan wordt er een aantal bits, zeg n stuks, gebruikt om de significant $1.123 \ldots \mathrm{n}$ binair weer te geven. Het cijfer 1 hoeft natuurlijk niet opgeslagen te worden; vandaar dat we hier aan n bits nodig hebben om een getal van $n+1$ cijfers op te slaan.

De bovenstaande binaire manier van representeren is vastgelegd in de IEEE 754 norm. Een groot deel van de gangbare software houdt zich aan deze norm en ook processors zijn vaak al hierop voorbereid met ingebouwde floating point operaties. Voor de aantallen bits levert IEEE 754 ook vaste normen (met wat vrijheid voor de z.g. extended precision formats), met name:

- single precision: 1 sign bit, voor de exponent 8 bits (≥ -126 en ≤ 127) met bias 127, voor de significant 23 bits (dus 24 cijfers), totaal 32 bits.
- double precision: 1 sign bit, voor de exponent 11 bits (≥ -1022 en ≤ 1023) met bias 1023, voor de significant 53 bits (dus 54 cijfers), totaal 64 bits.

Een speciaal geval is het getal 0, waarvoor nog een speciale interne notatie bestaat: alle bits 0. Dat zou volgens bovenstaande het getal $1.00\ldots0 \times 2^{-127}$ suggereren, maar het wordt dus geïnterpreteerd als 0. Er zijn overigens nog een aantal speciale codes voor 'NaNs' (Not a Number's) zoals overflow, underflow, wortel uit -1, etc. die gebruik maken van die grensexponenten, dus bij single precision de gevallen dat de exponent gecodeerd is als 0 of als 255 (je zou dan denken aan een exponent van -127 of 128).

opgave F.2 — *oefening*

a. Wat is het grootste getal in single precision en hoe wordt dat gerepresenteerd? En wat is de single precision representant van het omgekeerde ervan?

b. Wat is het absoluut kleinste positieve getal (het dichtste bij 0) in single precision en hoe wordt dat gerepresenteerd? En wat is de single precision representant van het omgekeerde ervan?

opgave F.3 — *programmeer*

Je krijgt duidelijk effecten te zien van dat binaire rekenen als je de computer laat rekenen aan:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \ldots = ?$$

Probeer het eens en kijk wat de resultaten zijn voor de verschillende stappen. Het is dan verstandig van ieder resultaat het verschil met 2 af te drukken, dan heeft de computer geen kans door afronden de afwijkingen te verdoezelen.
Kun je hieraan aflezen, hoeveel binaire cijfers de significant heeft?

F.3 * Afrondfouten

Afrondfouten kunnen worden uitgedrukt in **ulp**: 'unit in the last place'. Als je decimaal rekent in 4 cijfers en in plaats van $1.234_{dec} \times 10^{-3}$ het getal $1.23_{dec} \times 10^{-3}$ neemt, dan scheelt dat 4 ulps, maar als je het vervangt door $1.235_{dec} \times 10^{-3}$ dan scheelt het maar 1 ulp.
De ulp is een heel natuurlijke eenheid, maar interessanter is vaak de **relatieve fout**: het quotiënt van de afwijking en de (echte) waarde. Wanneer je $1.234_{dec} \times 10^{-3}$ afrondt op $1.23_{dec} \times 10^{-3}$ dan is de relatieve fout

$$\frac{0.004_{dec} \times 10^{-3}}{1.234_{dec} \times 10^{-3}} \approx 0.003_{dec}$$

We gaan er nu van uit dat getallen netjes worden afgerond. Dan is de maximale relatieve fout in een decimaal getal van 4 cijfers sterk afhankelijk van de grootte van de significant: bij 1.000 is de maximale fout $\frac{0.0005}{1.000} = 0.0005 = 5 \times 10^{-4}$, maar bij significant 9.999 is de maximale fout $\frac{0.0005}{9.999} \approx 0.00005 = 5 \times 10^{-5}$, dus $\frac{1}{10}$ van de vorige. Die factor 10 in de relatieve fout door correct afronden heet de **wobble**. Bij decimaal rekenen is de wobble (ongeveer) 10.
We gaan dat nu niet niet algemeen bewijzen, het is te flauw om te doen.

Bij binair rekenen is de wobble veel kleiner. Neem de twee uitersten bij rekenen bijvoorbeeld in 10 cijfers:

$$\frac{0.0000000001}{1.000000000}_{bin} = 0.0000000001_{bin} = 2^{-10}$$

$$\frac{0.0000000001}{1.111111111}_{bin} \approx 0.00000000001_{bin} = 2^{-11}$$

Dat scheelt (vrijwel) een factor 2. Algemeen is bij binair rekenen (met een voldoende aantal cijfers) de wobble ongeveer 2.

Bij hexadecimaal rekenen is de wobble ongeveer 16, erg groot. Dit maakt het schatten van de nauwkeurigheid van hexadecimale berekeningen grof; mede daarom is hexadecimaal rekenen op computers tegenwoordig niet meer erg populair.

De maximale relatieve fout door correct afronden wordt de **machine-epsilon**, kortweg ϵ genoemd.

Bij binair rekenen in p cijfers krijg je de maximale relatieve fout bij $1.00\ldots0$; dat is dan de helft van een ulp, dus de helft van 2^{-p+1} en dat is precies 2^{-p}.

Bij decimaal rekenen in p cijfers krijg je ook de maximale relatieve fout bij $1.00\ldots0$; dat is dan de helft van een ulp, dus de helft van 10^{-p+1} en dat is precies 5×10^{-p}.

Opgave

opgave F.4 — *uitdager*

a. Als je binair rekent, wil je graag dat conversie naar decimaal en dan weer terug naar binair het oorspronkelijke binaire getal oplevert. Daartoe moet je voldoende decimale cijfers gebruiken: als er te weinig cijfers zijn, ligt er (soms) meer dan één binair genoteerd getal binnen het afrondgebied van een decimaal genoteerd getal en moet je bij terug converteren naar binair kiezen. Bereken nu hoeveel decimale cijfers je nodig hebt bij single precision.
   Advies: gebruik de schattingen van maximale en minimale relatieve fout uit het voorgaande en bedenk dat de relatieve fout voor binair best ongeveer minimaal kan zijn in een gebied waar de relatieve fout voor decimaal juist ongeveer maximaal is, bijvoorbeeld tussen $1.0\ldots0\,\mathrm{E}\,3_{dec}$ en $1.0\ldots0\,\mathrm{E}\,1010_{bin}$; omgekeerd tussen $1.0\ldots0\,\mathrm{E}\,7_{dec}$ en $1.0\ldots0\,\mathrm{E}\,10111_{bin}$.

b. Idem voor double precision.

c. In hoeveel cijfers decimaal rekenend krijg je zeker nog dezelfde cijfers terug als je converteert naar single precision en dan weer terug naar decimaal?

F.4 * Afrondproblemen in de rekenoperaties met FPN

Als je op een eenvoudige rekenmachine intikt: $1\ :\ 3\ *3\ =$, dan lees je in het venster $1.$ af, maar als je dan vervolgens nog eens $-\ 1\ \ =$ intikt, krijg je zoiets als 0.000000001 te zien. Blijkbaar rekent die rekenmachine intern met meer decimalen dan hij op het scherm toont, zodat je eerst netjes die $1.$ te zien krijgt, maar intern rammelt het: de interne berekening kan goed zó verlopen:

$$1 : 3 = .333\,333\,3333$$

In feite wordt de uitkomst intern gerepresenteerd als $3.333\,333\,333 \cdot 10^{-1}$, behalve op de allereenvoudigste rekenmachines, maar dat zullen we nu even vergeten.

$$.333\,333\,3333 * 3 = .999\,999\,9999$$

$$\begin{aligned} .999\,999\,9999 - 1. &= .999\,999\,9999 - 1.000\,000\,000 \\ &= 0.999\,999\,999 - 1.000\,000\,000 = 0.000\,000\,001 \end{aligned}$$

Om de aftrekking te kunnen maken moet de rekenmachine het eerste getal een plaats naar rechts verschuiven (shift right) om beide getallen ‘onder elkaar’ te krijgen en daardoor verliest het een cijfer.
Moderne geavanceerde rekenmachines leveren aan het eind van deze exercitie toch een 0. Een truc om dat te kunnen bereiken is het gebruik van een z.g. **guard digit**: je zet achter het getal dat het meest links eindigt, hier dus $1.000\,000\,000$ nog één extra 0, gaat daarmee de aftrekking maken en gooit dan het laatste cijfer netjes weg door goed af te ronden:

$$\begin{aligned} 1.000\,000\,000 - 0.999\,999\,9999 &= 1.000\,000\,0000 - 0.999\,999\,9999 \\ &= 0.000\,000\,0001 \\ &\text{en dat levert } 0.000\,000\,000 \end{aligned}$$

Dat is in de praktijk een grote verbetering, maar werkt ook zeker niet altijd vlekkeloos (zie opgaven).
Wat je eigenlijk zou willen is dat de berekening exact wordt uitgevoerd, dus door toevoeging van net zo veel nullen aan de achterkant van getallen als nodig is om de de getallen onder elkaar te krijgen, en dan pas aan het eind netjes afronden. Dat heet **exact afgerond** (**exactly rounded**) rekenen. Dat is met slimme trucs mogelijk o.a. voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Voor deze vier operaties wordt dat ook vereist in de IEEE-normen.
Hier zie je een voorbeeld van de verschillende afrondmethodes: we gaan in 6 cijfers decimaal $1.0000 - 0.045678$ berekenen. Eerst exact, dan met guard digit, dan met gewoon kappen:

```
1.0000000         1.000000         1.00000
0.0045678         0.004567         0.00456
--------- -       -------- -       -------- 
0.9954322         0.995433         0.99544
```

correct afgerond:

```
0.995432          0.995433         0.995440
```

Met de guard digit zit je er hier maar 1 ulp naast, maar met kappen is het verschil 8 ulps.

Opgave

opgave F.5 — *oefening*
We gaan rekenen in een binair systeem met (slechts) 4 cijfers. Bereken voor elk van de volgende binaire rekenopgaven het resultaat op drie manieren:

- Exactly rounded: reken eerst zonder afronden precies uit en rond daarna correct af op 4 cijfers.
- Gebruik een guard digit, dus reken in 5 cijfers, kap af om de getallen onder elkaar te krijgen en rond aan het eind af om het laatste cijfer weg te werken.
- Kappen: reken gewoon met 4 cijfers, kap af waar nodig om de getallen onder elkaar te krijgen. Geef ook de fout t.o.v. onderdeel a.

a. $1.000 - 0.1111$
b. $1.000 - 0.001111$
c. $1.000 - 0.001011$
d. $1.000 - 0.001101$

opgave F.6 — *oefening*
Aan welke eigenschappen van een lichaam voldoet het systeem van floating point numbers (volgens IEEE 754) en aan welke niet? Leg je antwoorden uit.

UNIVERSITY OF ABERDEEN

Department of Mathematical Sciences

Advanced Calculus and Analysis MA1002

Ian Craw

November 6, 2000, Version 1.5

Additional copies may be obtained from:

Department of Mathematical Sciences
University of Aberdeen
Aberdeen AB9 2TY

DSN: mth200-101982-8

Foreword

These Notes

The notes contain the material that I use when preparing lectures for a course I gave from the mid 1980's until 1994; in that sense they are *my* lecture notes.

> "Lectures were once useful, but now when all can read, and books are so numerous, lectures are unnecessary." *Samuel Johnson, 1799.*

Lecture notes have been around for centuries, either informally, as handwritten notes, or formally as textbooks. Recently improvements in typesetting have made it easier to produce "personalised" printed notes as here, but there has been no fundamental change. Experience shows that very few people are able to use lecture notes as a *substitute* for lectures; if it were otherwise, lecturing, as a profession would have died out by now.

These notes have a long history; a "first course in analysis" rather like this has been given within the Mathematics Department for at least 30 years. During that time many people have taught the course and all have left their mark on it; clarifying points that have proved difficult, selecting the "right" examples and so on. I certainly benefited from the notes that Dr Stuart Dagger had written, when I took over the course from him and this version builds on that foundation, itslef heavily influenced by (Spivak 1967) which was the recommended textbook for most of the time these notes were used.

The notes are written in LaTeX which allows a higher level view of the text, and simplifies the preparation of such things as the index on page 101 and numbered equations. You will find that most equations are not numbered, or are numbered symbolically. However sometimes I want to refer back to an equation, and in that case it is numbered within the section. Thus Equation (1.1) refers to the first numbered equation in Chapter 1 and so on.

Acknowledgements

These notes, in their printed form, have been seen by many students in Aberdeen since they were first written. I thank those (now) anonymous students who helped to improve their quality by pointing out stupidities, repetitions misprints and so on.

Since the notes have gone on the web, others, mainly in the USA, have contributed to this gradual improvement by taking the trouble to let me know of difficulties, either in content or presentation. As a way of thanking those who provided such corrections, I endeavour to incorporate the corrections in the text almost immediately. At one point this was no longer possible; the diagrams had been done in a program that had been 'subsequently "upgraded" so much that they were no longer useable. For this reason I had to withdraw the notes. However all the diagrams have now been redrawn in "public

domaian" tools, usually `xfig` and `gnuplot`. I thus expect to be able to maintain them in future, and would again welcome corrections.

Ian Craw
Department of Mathematical Sciences
Room 344, Meston Building
email: Ian.Craw@maths.abdn.ac.uk
www: http://www.maths.abdn.ac.uk/~igc
November 6, 2000

Contents

List of Figures

Chapter 1

Introduction.

This chapter contains reference material which you should have met before. It is here both to remind you that you have, and to collect it in one place, so you can easily look back and check things when you are in doubt.

You are aware by now of just how sequential a subject mathematics is. If you don't understand something when you first meet it, you usually get a second chance. Indeed you will find there are a number of ideas here which it is essential you now understand, because you will be using them all the time. So another aim of this chapter is to repeat the ideas. It makes for a boring chapter, and perhaps should have been headed "all the things you hoped never to see again". However I am only emphasising things that you will be using in context later on.

If there is material here with which you are not familiar, don't panic; any of the books mentioned in the book list can give you more information, and the first tutorial sheet is designed to give you practice. And ask in tutorial if you don't understand something here.

1.1 The Need for Good Foundations

It is clear that the calculus has many outstanding successes, and there is no real discussion about its viability as a theory. However, despite this, there are problems if the theory is accepted uncritically, because naive arguments can quickly lead to errors. For example the chain rule can be phrased as

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx},$$

and the "quick" form of the proof of the chain rule — cancel the dy's — seems helpful. However if we consider the following result, in which the pressure P, volume V and temperature T of an enclosed gas are related, we have

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1, \tag{1.1}$$

a result which certainly does not appear "obvious", even though it is in fact true, and we shall prove it towards the end of the course.

Another example comes when we deal with infinite series. We shall see later on that the series

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \dots$$

adds up to $\log 2$. However, an apparently simple re-arrangement gives

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) \dots$$

and this clearly adds up to half of the previous sum — or $\log(2)/2$.

It is this need for care, to ensure we can *rely* on calculations we do, that motivates much of this course, illustrates why we emphasise accurate argument as well as getting the "correct" answers, and explains why in the rest of this section we need to revise elementary notions.

1.2 The Real Numbers

We have four infinite sets of familiar objects, in increasing order of complication:

$\mathbb{N}$ — **the Natural numbers** are defined as the set $\{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$. Contrast these with the **positive integers**; the same set without 0.

$\mathbb{Z}$ — **the Integers** are defined as the set $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\}$.

$\mathbb{Q}$ — **the Rational numbers** are defined as the set $\{p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$.

$\mathbb{R}$ — **the Reals** are defined in a much more complicated way. In this course you will start to see why this complication is necessary, as you use the distinction between $\mathbb{R}$ and $\mathbb{Q}$.

Note: We have a natural inclusion $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, and each inclusion is proper. The only inclusion in any doubt is the last one; recall that $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (i.e. it is a real number that is not rational).

One point of this course is to illustrate the difference between $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{R}$. It is subtle: for example when computing, it can be ignored, because a computer always works with a rational approximation to any number, and as such can't distinguish between the two sets. We hope to show that the complication of introducing the "extra" reals such as $\sqrt{2}$ is worthwhile because it gives simpler results.

Properties of $\mathbb{R}$

We summarise the properties of $\mathbb{R}$ that we work with.

Addition: We can add and subtract real numbers exactly as we expect, and the usual rules of arithmetic hold — such results as $x + y = y + x$.

Multiplication: In the same way, multiplication and division behave as we expect, and interact with addition and subtraction in the usual way. So we have rules such as $a(b + c) = ab + ac$. Note that we can divide by any number except 0. We make no attempt to make sense of $a/0$, even in the "funny" case when $a = 0$, so for us $0/0$ is meaningless. Formally these two properties say that (algebraically) $\mathbb{R}$ is a field, although it is not essential at this stage to know the terminology.

Order As well as the algebraic properties, $\mathbb{R}$ has an ordering on it, usually written as "$a > 0$" or "$\geq$". There are three parts to the property:

Trichotomy For any $a \in \mathbb{R}$, exactly one of $a > 0$, $a = 0$ or $a < 0$ holds, where we write $a < 0$ instead of the formally correct $0 > a$; in words, we are simply saying that a number is either positive, negative or zero.

Addition The order behaves as expected with respect to addition: if $a > 0$ and $b > 0$ then $a + b > 0$; i.e. the sum of positives is positive.

Multiplication The order behaves as expected with respect to multiplication: if $a > 0$ and $b > 0$ then $ab > 0$; i.e. the product of positives is positive.

Note that we write $a \geq 0$ if either $a > 0$ or $a = 0$. More generally, we write $a > b$ whenever $a - b > 0$.

Completion The set $\mathbb{R}$ has an additional property, which in contrast is much more mysterious — it is complete. It is this property that distinguishes it from $\mathbb{Q}$. Its effect is that there are always "enough" numbers to do what we want. Thus there are enough to solve any algebraic equation, even those like $x^2 = 2$ which can't be solved in $\mathbb{Q}$. In fact there are (uncountably many) more - all the numbers like π, certainly not rational, but in fact not even an algebraic number, are also in $\mathbb{R}$. We explore this property during the course.

One reason for looking carefully at the properties of $\mathbb{R}$ is to note possible errors in manipulation. One aim of the course is to emphasise accurate explanation. Normal algebraic manipulations can be done without comment, but two cases arise when more care is needed:

Never divide by a number without checking first that it is non-zero.

Of course we know that 2 is non zero, so you don't need to justify dividing by 2, but if you divide by x, you should always say, at least the first time, why $x \neq 0$. If you don't know whether $x = 0$ or not, the rest of your argument may need to be split into the two cases when $x = 0$ and $x \neq 0$.

Never multiply an inequality by a number without checking first that the number is positive.

Here it is even possible to make the mistake with numbers; although it is perfectly sensible to multiply an equality by a constant, the same is not true of an inequality. If $x > y$, then of course $2x > 2y$. However, we have $(-2)x < (-2)y$. If multiplying by an expression, then again it may be necessary to consider different cases separately.

1.1. Example. Show that if $a > 0$ then $-a < 0$; and if $a < 0$ then $-a > 0$.

Solution. This is not very interesting, but is here to show how to use the properties formally.

Assume the result is false; then by trichotomy, $-a = 0$ (which is false because we know $a > 0$), or $(-a) > 0$. If this latter holds, then $a + (-a)$ is the sum of two positives and so is positive. But $a + (-a) = 0$, and by trichotomy $0 > 0$ is false. So the only consistent possibility is that $-a < 0$. The other part is essentially the same argument.

1.2. Example. Show that if $a > b$ and $c < 0$, then $ac < bc$.

Solution. This also isn't very interesting; and is here to remind you that the order in which questions are asked can be helpful. The hard bit about doing this is in Example 1.1. This is an idea you will find a lot in example sheets, where the next question *uses* the result of the previous one. It may dissuade you from dipping into a sheet; try rather to work through systematically.

Applying Example 1.1 in the case $a = -c$, we see that $-c > 0$ and $a - b > 0$. Thus using the multiplication rule, we have $(a - b)(-c) > 0$, and so $bc - ac > 0$ or $bc > ac$ as required.

1.3. Exercise. Show that if $a < 0$ and $b < 0$, then $ab > 0$.

1.3 Inequalities

One aim of this course is to get a *useful* understanding of the behaviour of systems. Think of it as trying to see the wood, when our detailed calculations tell us about individual trees. For example, we may want to know *roughly* how a function behaves; can we perhaps ignore a term because it is small and simplify things? In order to to this we need to estimate — replace the term by something bigger which is easier to handle, and so we have to deal with inequalities. It often turns out that we can "give something away" and still get a useful result, whereas calculating directly can prove either impossible, or at best unhelpful. We have just looked at the rules for manipulating the order relation. This section is probably all revision; it is here to emphasise the need for care.

1.4. Example. Find $\{x \in \mathbb{R} : (x - 2)(x + 3) > 0\}$.

Solution. Suppose $(x - 2)(x + 3) > 0$. Note that if the product of two numbers is positive then either both are positive or both are negative. So *either* $x - 2 > 0$ and $x + 3 > 0$, in which case both $x > 2$ and $x > -3$, so $x > 2$; *or* $x - 2 < 0$ and $x + 3 < 0$, in which case both $x < 2$ and $x < -3$, so $x < -3$. Thus

$$\{x : (x - 2)(x + 3) > 0\} = \{x : x > 2\} \cup \{x : x < -3\}.$$

1.5. Exercise. Find $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 2 < 0\}$.

Even at this simple level, we can produce some interesting results.

1.6. Proposition (Arithmetic - Geometric mean inequality). *If $a \geq 0$ and $b \geq 0$ then*

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Solution. For any value of x, we have $x^2 \geq 0$ (why?), so $(a-b)^2 \geq 0$. Thus

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0, \\ a^2 + 2ab + b^2 &\geq 4ab. \\ (a+b)^2 &\geq 4ab. \end{aligned}$$

Since $a \geq 0$ and $b \geq 0$, taking square roots, we have $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. This is the **arithmetic - geometric mean inequality**. We study further work with inequalities in section 1.7.

1.4 Intervals

We need to be able to talk easily about certain subsets of $\mathbb{R}$. We say that $I \subset \mathbb{R}$ is an **open interval** if

$$I = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Thus an open interval excludes its end points, but contains all the points in between. In contrast a **closed interval** contains both its end points, and is of the form

$$I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

It is also sometimes useful to have **half - open** intervals like $(a, b]$ and $[a, b)$. It is trivial that $[a, b] = (a, b) \cup \{a\} \cup \{b\}$.

> The two end points a and b are points in $\mathbb{R}$. It is *sometimes* convenient to allow also the possibility $a = -\infty$ and $b = +\infty$; it should be clear from the context whether this is being allowed. If these extensions are being excluded, the interval is sometimes called a *finite* interval, just for emphasis.

Of course we can easily get to more general subsets of $\mathbb{R}$. So $(1, 2) \cup [2, 3] = (1, 3]$ shows that the union of two intervals may be an interval, while the example $(1, 2) \cup (3, 4)$ shows that the union of two intervals *need not* be an interval.

1.7. Exercise. Write down a pair of intervals I_1 and I_2 such that $1 \in I_1$, $2 \in I_2$ and $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.

Can you still do this, if you require in addition that I_1 is centred on 1, I_2 is centred on 2 and that I_1 and I_2 have the same (positive) length? What happens if you replace 1 and 2 by any two numbers l and m with $l \neq m$?

1.8. Exercise. Write down an interval I with $2 \in I$ such that $1 \notin I$ and $3 \notin I$. Can you find the largest such interval? Is there a largest such interval if you also require that I is closed?

Given l and m with $l \neq m$, show there is always an interval I with $l \in I$ and $m \notin I$.

1.5 Functions

Recall that $f : D \subset \mathbb{R} \to T$ is a **function** if $f(x)$ is a well defined value in T for each $x \in D$. We say that D is the **domain** of the function, T is the **target space** and $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$ is the **range** of f.

Note first that the definition says nothing about a formula; just that the result must be properly defined. And the definition can be complicated; for example

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq a \text{ or } x \geq b; \\ 1 & \text{if } a < x < b. \end{cases}$$

defines a function on the whole of $\mathbb{R}$, which has the value 1 on the open interval (a, b), and is zero elsewhere [and is usually called the *characteristic* function of the interval (a, b).]

In the simplest examples, like $f(x) = x^2$ the domain of f is the whole of $\mathbb{R}$, but even for relatively simple cases, such as $f(x) = \sqrt{x}$, we need to restrict to a smaller domain, in this case the domain D is $\{x : x \geq 0\}$, since we cannot define the square root of a negative number, at least if we want the function to have real - values, so that $T \subset \mathbb{R}$.

Note that the domain is part of the definition of a function, so changing the domain technically gives a different function. This distinction will start to be important in this course. So $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by $f_1(x) = x^2$ and $f_2 : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ defined by $f_2(x) = x^2$ are formally *different* functions, even though they both are "x^2" Note also that the range of f_2 is $[0, 4]$. This illustrate our first use of intervals. Given $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, we can always restrict the domain of f to an interval I to get a new function. Mostly this is trivial, but sometimes it is useful.

Another natural situation in which we need to be careful of the domain of a function occurs when taking quotients, to avoid dividing by zero. Thus the function

$$f(x) = \frac{1}{x - 3} \quad \text{has domain } \{x \in \mathbb{R} : x \neq 3\}.$$

The point we have excluded, in the above case 3 is sometimes called a **singularity** of f.

1.9. Exercise. Write down the natural domain of definition of each of the functions:

$$f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 5x + 6} \qquad g(x) = \frac{1}{\sin x}.$$

Where do these functions have singularities?

It is often of interest to investigate the behaviour of a function near a singularity. For example if

$$f(x) = \frac{x - a}{x^2 - a^2} = \frac{x - a}{(x - a)(x + a)} \quad \text{for } x \neq a.$$

then since $x \neq a$ we can cancel to get $f(x) = (x + a)^{-1}$. This is of course a different representation of the function, and provides an indication as to how f may be extended through the singularity at a — by giving it the value $(2a)^{-1}$.

1.6 Neighbourhoods

This situation often occurs. We need to be able to talk about a function *near* a point: in the above example, we don't want to worry about the singularity at $x = -a$ when we are discussing the one at $x = a$ (which is actually much better behaved). If we only look at the points distant less than d for a, we are really looking at an interval $(a - d, a + d)$; we call such an interval a **neighbourhood** of a. For traditional reasons, we usually replace the distance d by its Greek equivalent, and speak of a distance δ. If $\delta > 0$ we call the interval $(a - \delta, a + \delta)$ a neighbourhood (sometimes a δ - neighbourhood) of a. The significance of a neighbourhood is that it is an interval in which we can look at the behaviour of a function without being distracted by other irrelevant behaviours. It usually doesn't matter whether δ is very big or not. To see this, consider:

1.10. Exercise. Show that an open interval contains a neighbourhood of each of its points.

We can rephrase the result of Ex 1.7 in this language; given $l \neq m$ there is some (sufficiently small) δ such that we can find disjoint δ - neighbourhoods of l and m. We use this result in Prop 2.6.

1.7 Absolute Value

Here is an example where it is natural to use a two part definition of a function. We write

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0; \\ -x & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

An equivalent definition is $|x| = \sqrt{x^2}$. This is the **absolute value** or **modulus** of x. It's particular use is in describing distances; we interpret $|x - y|$ as the distance between x and y. Thus

$$(a - \delta, a + \delta) = \{X \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\},$$

so a δ - neighbourhood of a consists of all points which are closer to a than δ.

Note that we can always "expand out" the inequality using this idea. So if $|x - y| < k$, we can rewrite this without a modulus sign as the pair of inequalities $-k < x - y < k$. We sometimes call this "unwrapping" the modulus; conversely, in order to establish an inequality involving the modulus, it is simply necessary to show the corresponding pair of inequalities.

1.11. Proposition (The Triangle Inequality.). *For any $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Proof. Since $-|x| \leq x \leq |x|$, and the same holds for y, combining these we have

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$

and this is the same as the required result. □

1.12. Exercise. Show that for any $x, y, z \in \mathbb{R}$, $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

1.13. Proposition. *For any $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$|x - y| \geq \Big| |x| - |y| \Big|.$$

Proof. Using 1.12 we have

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$$

and so $|x| - |y| \leq |x - y|$. Interchanging the rôles of x and y, and noting that $|x| = |-x|$, gives $|y| - |x| \leq |x - y|$. Multiplying this inequality by -1 and combining these we have

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$$

and this is the required result. □

1.14. Example. Describe $\{x \in \mathbb{R} : |5x - 3| > 4\}$.

Proof. Unwrapping the modulus, we have either $5x - 3 < -4$, or $5x - 3 > 4$. From one inequality we get $5x < -4 + 3$, or $x < -1/5$; the other inequality gives $5x > 4 + 3$, or $x > 7/5$. Thus

$$\{x \in \mathbb{R} : |5x - 3| > 4\} = (-\infty, -1/5) \cup (7/5, \infty).$$

□

1.15. Exercise. Describe $\{x \in \mathbb{R} : |x + 3| < 1\}$.

1.16. Exercise. Describe the set $\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 3\}$ using the absolute value function.

1.8 The Binomial Theorem and other Algebra

At its simplest, the binomial theorem gives an expansion of $(1+x)^n$ for any positive integer n. We have

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n.(n-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{n.(n-1).(n-k+1)}{1.2.\ldots.k}x^k + \ldots + x^n.$$

Recall in particular a few simple cases:

$$\begin{aligned}
(1 + x)^3 &= 1 + 3x + 3x^2 + x^3, \\
(1 + x)^4 &= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4, \\
(1 + x)^5 &= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5.
\end{aligned}$$

There is a more general form:

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n.(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n.(n-1).(n-k+1)}{1.2.\ldots.k}a^{n-k}b^k + \ldots + b^n,$$

with corresponding special cases. Formally this result is only valid for any positive integer n; in fact it holds appropriately for more general exponents as we shall see in Chapter 7

Another simple algebraic formula that can be useful concerns powers of differences:

$$\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), \\
a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2), \\
a^4 - b^4 &= (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)
\end{aligned}$$

and in general, we have

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^b n - 1 + b^{n-1}).$$

Note that we made use of this result when discussing the function after Ex 1.9.

And of course you remember the usual "completing the square" trick:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right). \end{aligned}$$

bij Ian Craw: Intro Calculus and Analysis Chapter G1

INTRODUCTION

Correctie in de paragraaf over het binomial theorem:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + \ldots + a^{n-k}b^{k-1} + \ldots + a\,b^{n-2} + b^{n-1})$$

Toevoeging bij **propositions 1.11** en **1.13** (**driehoeksongelijkheden**)
Er is nog een extra formule bij 1.11. In wezen is dat dezelfde formule, maar omdat hij er anders uitziet en lijkt op de formule van 1.13, is het goed die er bij te zien. Totaal krijgen we nu drie formules:

$$\boxed{\begin{array}{c} |x+y| \le |x| + |y| \\ |x-y| \le |x| + |y| \\ |x-y| \ge \big||x| - |y|\big| \end{array}}$$

Enkele voorbeelden voor het oplossen van ongelijkheden:

(G1.1) *voorbeeld:*

$?x \in R:\quad x^2 > 5$ levert als oplossing $x > \sqrt{5}$ of $x < -\sqrt{5}$. Let op het teken!
De oplossing lees je zo af uit de grafiek van $x \mapsto x^2$! In feite gebruik je je kennis over dalen (links van 0) en stijgen (rechts van 0) van de functie $x \mapsto x^2$.
einde voorbeeld

(G1.2) *voorbeeld:*

$?x \in R:\quad \frac{1}{x} < 5$ levert als oplossing $x > \frac{1}{5}$ of $x < 0$.
Als je alleen maar oplost voor welke x geldt dat $\frac{1}{x} = 5$ en dan kijkt aan welke kant je goed zit, vergeet je een stuk van de oplossingsverzameling. Ook hier moet je weer nadenken over de betreffende functie, hier dus over $x \mapsto \frac{1}{x}$. Je kunt dus denken aan de grafiek van $x \mapsto \frac{1}{x}$. Dan zie je direct dat oplossingsverzameling meer is dan $x > \frac{1}{5}$.
Overigens is dit een tamelijk vieze vraag: als $x = 0$ heeft $\frac{1}{x}$ geen betekenis, en dan is de vraag of dat kleiner is dan 5 eigenlijk absurd!
einde voorbeeld

(G1.3) *voorbeeld:*

$?x \in R:\quad (\frac{1}{3})^x > 81$ levert als oplossing $x < -4$. Hier is het risico dat je blindelings het teken overschrijft en "$x > -4$" opschrijft. Denk aan de grafiek van $x \mapsto x \mapsto (\frac{1}{3})^x$, dus denk in feite er aan dat de functie $x \mapsto (\frac{1}{3})^x$ overal dalend is.
einde voorbeeld

(G1.4) aanpak van ongelijkheden: *Doorgaans pak je ongelijkheden aan door te kijken naar stijgen en dalen van de betrokken functies en eventuele sprongpunten (bijvoorbeeld bij vertikale asymptoten). Bij het analyseren van het gedrag van een functie kan de afgeleide een handig hulpmiddel zijn. Dat komt bij het hoofdstuk differentiëren nog aan de orde.*

opgave G1.1 — *oefening*
Los de volgende ongelijkheden op.

a. $?x \in R: \quad |x| < 5$
b. $?x \in R: \quad |2x - 1| < 5$
c. $?x \in R: \quad \dfrac{1}{3-x} < 2$
d. $?x \in R: \quad (x-5)^4 > 64$
e. $?x \in R: \quad (5-x)^3 > 64$
f. $?x \in R: \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x < 81$
g. $?x \in R: \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{(x^2)} < 64$
h. $?x \in R: \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{(x^2)} < \frac{1}{64}$
i. $?x \in R: \quad {}^{\frac{1}{2}}\log(x) < 5$
j. $?x \in R: \quad (\tan(x))^2 > 1$
k. $?x \in R: \quad (\cos(x))^2 < \frac{1}{4}$
l. $?x \in R: \quad {}^{\frac{1}{2}}\log(x+1) > 8$

opgave G1.2 —
Los op:

a. $?x \in R: \quad \tan(4x+1) \leq 1$
b. $?x \in R: \quad (\dfrac{1}{3})^{4x} < 9$
c. $?x \in R: \quad \sqrt{25 - x^2} < 3$
d. $?x \in R: \quad \dfrac{1}{2 - x^2} \geq \dfrac{1}{25}$
e. $?x \in R: \quad \dfrac{1}{2 - x^2} \geq 25$

opgave G1.3 —
Los op:

a. $?x \in R: \quad \dfrac{1}{x-5} - \dfrac{1}{x+5} < 2$
b. $?x \in R: \quad \cos(3x - \frac{1}{4}\pi) < \frac{1}{2}$
c. $?x \in R: \quad {}^{\frac{1}{2}}\log(x) - {}^{\frac{1}{2}}\log(2x-1) < 8$

bij Ian Craw: Intro Calculus and Analysis Chapter G2

Sequences

Inleiding

(G2.1) notatie: *Een rij wordt hier -zoals gebruikelijk in de wiskunde- als een functie op de natuurlijke getallen opgevat, waarbij het argument doorgaans als index genoteerd wordt. De rij van omgekeerden van kwadraten van natuurlijke getallen groter dan* 0

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$$

noteren we dus als

$$n \mapsto \frac{1}{n^2}$$

Als we die rij bijvoorbeeld de naam K *geven:*

$$K: \quad n \mapsto \frac{1}{n^2}$$

dan kun je schrijven:

$$K_n = \frac{1}{n^2}$$

Dus K *is nu een object van type 'sequence' of 'rij';* $n \mapsto \frac{1}{n^2}$ *is een denotatie van een rij. Daarentegen is* K_n *geen object van type 'sequence' of 'rij', maar een generieke aanduiding van een element van die rij.*
De nummering van rijen loopt doorgaans vanaf 0 *of vanaf* 1.
Je ziet soms ook wel als notatie van een rij iets met accolades, zoiets als $\{K_n\}$ *of* $\{\frac{1}{n^2}\}$ *of zoiets. Formeel is dat niet juist: in een verzameling is de volgorde niet vastgelegd, in een rij juist wel, maar als je dat tegenkomt, begrijp je natuurlijk wel wat er bedoeld wordt.*

Correcties:
Berekening in de methode van Newton pag.12 midden: er ontbreekt een -teken:

$$0 = f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) \quad \text{and so} \quad h \approx -\frac{f(a)}{f'(a)}$$

Direct na 2.4 Definition: "We call N a witness . . . " (hoofdletter N dus.)

Toevoegingen
Het belang van 2.6 (Proposition) is dat je nu kunt spreken van DE limiet van een convergente rij.

2.16 Wat je hier moet bewijzen mag je tevens als stelling gebruiken, zelfs in een iets sterkere vorm:

(G2.2) stelling: *Laat* a *en* b *convergente rijen zijn en* M *een natuurlijk getal, zodat*

$$\forall n > M: \quad a_n \leq b_n$$

d.w.z. dat de elementen van a *op den duur allemaal* $\leq$ *het element van* b *met hetzelfde nummer zijn. Dan*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$$

Het is een handig te gebruiken stelling, dus onthoud hem en schrijf hem in je theorie-overzicht!

In 2.17 toevoeging: Let $a_n \leq b_n \leq c_n$

$$\text{for all } n \text{ or for all } n \leq N, \text{ where } N \text{ is some integer}$$

and suppose . . . .

2.22 Kan handiger: afschatting links met 0:

$$0 < \frac{1}{n\ \log(n)} < \frac{1}{n}$$

2.25 Dit is een Exercise!
Extra stelling:

(G2.3) stelling:

a. Als $a > 0$ *dan* $\lim_{n\to\infty} n^a = \infty$.

b. Als $a < 0$ *dan* $\lim_{n\to\infty} n^a = \infty$.

In opgave G2.2 op bldz. 203 kun je die stelling zelf gaan bewijzen.

Chapter 2

Sequences

2.1 Definition and Examples

2.1. Definition. A (real infinite) sequence is a map $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Of course if is more usual to call a function f rather than a; and in fact we usually start labeling a sequence from 1 rather than 0; it doesn't really matter. What the definition is saying is that we can lay out the members of a sequence in a list with a first member, second member and so on. If $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, we usually write a_1, a_2 and so on, instead of the more formal $a(1)$, $a(2)$, even though we usually write functions in this way.

2.1.1 Examples of sequences

The most obvious example of a sequence is the sequence of natural numbers. Note that the integers are not a sequence, although we can turn them into a sequence in many ways; for example by enumerating them as $0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2\ldots.$ Here are some more sequences:

Definition	First 4 terms	Limit
$a_n = n - 1$	$0,\ 1,\ 2,\ 3$	does not exist ($\to \infty$)
$a_n = \dfrac{1}{n}$	$1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4}$	0
$a_n = (-1)^{n+1}$	$1,\ -1,\ 1,\ -1$	does not exist (the sequence oscillates)
$a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$	$1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{4}$	0
$a_n = \dfrac{n-1}{n}$	$0,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4}$	1
$a_n = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$	$0,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{3}{4}$	does not exist (the sequence oscillates)
$a_n = 3$	$3,\ 3,\ 3,\ 3$	3

A sequence doesn't have to be defined by a sensible "formula". Here is a sequence you may recognise:-

$$3, \quad 3.1, \quad 3.14, \quad 3.141, \quad 3.1415, \quad 3.14159, \quad 3.141592\ldots$$

where the terms are successive truncates of the decimal expansion of π.

Of course we can graph a sequence, and it sometimes helps. In Fig 2.1 we show a sequence of locations of (just the x coordinate) of a car driver's eyes. The interest is whether the sequence oscillates predictably.

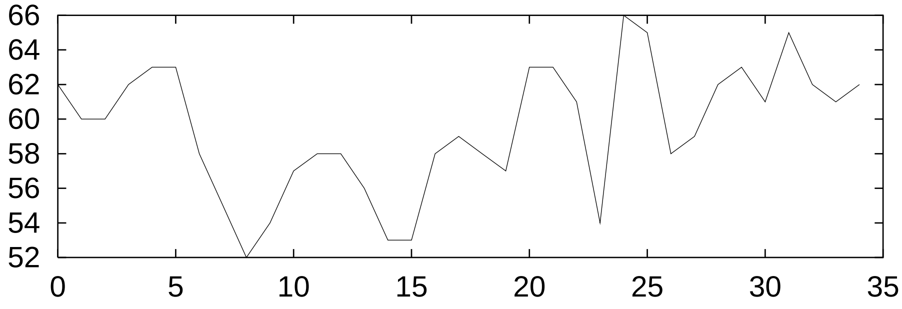


Figure 2.1: A sequence of eye locations.

Usually we are interested in what happens to a sequence "in the long run", or what happens "when it settles down". So we are usually interested in what happens when $n \to \infty$, or in the **limit** of the sequence. In the examples above this was fairly easy to see.

Sequences, and interest in their limits, arise naturally in many situations. One such occurs when trying to solve equations numerically; in Newton's method, we use the standard calculus approximation, that

$$f(a+h) \approx f(a) + h.f'(a).$$

If now we almost have a solution, so $f(a) \approx 0$, we can try to perturb it to $a+h$, which is a true solution, so that $f(a+h) = 0$. In that case, we have

$$0 = f(a+h) = f(a) + h.f'(a) \quad \text{and so} \quad h \approx \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Thus a better approximation than a to the root is $a + h = a - f(a)/f'(a)$.

If we take $f(x) = x^3 - 2$, finding a root of this equation is solving the equation $x^3 = 2$, in other words, finding $\sqrt[3]{2}$ In this case, we get the sequence defined as follows

$$a_1 = 1 \text{while} a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{2}{3a_n^2} \quad \text{if } n > 1. \tag{2.1}$$

Note that this makes sense: $a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{2}{3}.1 + \dfrac{2}{3.1^2}$ etc. Calculating, we get $a_2 = 1.333$, $a_3 = 1.2639$, $a_4 = 1.2599$ and $a_5 = 1.2599$ In fact the sequence does converge to $\sqrt[3]{2}$; by taking enough terms we can get an *approximation* that is as accurate as we need. [You can check that $a_5^3 = 2$ to 6 decimal places.]

Note also that we need to specify the accuracy needed. There is no *single* approximation to $\sqrt[3]{2}$ or π which will always work, whether we are measuring a flower bed or navigating a satellite to a planet. In order to use such a sequence of approximations, it is first necessary to specify an acceptable accuracy. Often we do this by specifying a neighbourhood of the limit, and we then often speak of an ϵ - neighbourhood, where we use ϵ (for error), rather than δ (for distance).

2.2. Definition. Say that a sequence $\{a_n\}$ **converges** to a **limit** l if and only if, given $\epsilon > 0$ there is some N such that

$$|a_n - l| < \epsilon \quad \text{whenever} \quad n \geq N.$$

A sequence which converges to some limit is a **convergent sequence**.

2.3. Definition. A sequence which is not a convergent sequence is **divergent**. We sometimes speak of a sequence **oscillating** or tending to infinity, but properly I am just interested in divergence at present.

2.4. Definition. Say a property $P(n)$ holds **eventually** iff $\exists N$ such that $P(n)$ holds for all $n \geq N$. It holds **frequently** iff given N, there is some $n \geq N$ such that $P(n)$ holds.

We call the n a **witness**; it witnesses the fact that the property is true somewhere at least as far along the sequence as N. Some examples using the language are worthwhile. The sequence $\{-2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ is eventually positive. The sequence $\sin(n!\pi/17)$ is eventually zero; the sequence of natural numbers is frequently prime.

It may help you to understand this language if you think of the sequence of days in the future[1]. You will find, according to the definitions, that it will frequently be Friday, frequently be raining (or sunny), and even frequently February 29. In contrast, eventually it will be 1994, and eventually you will die. A more difficult one is whether Newton's work will eventually be forgotten!

Using this language, we can rephrase the definition of convergence as

> We say that $a_n \to l$ as $n \to \infty$ iff given any error $\epsilon > 0$ eventually a_n is closer to l then ϵ. Symbolically we have
>
> $$\epsilon > 0 \quad \exists N \quad \text{s.t.} \quad |a_n - l| < \epsilon \quad \text{whenever} \quad n \geq N.$$

Another version may make the content of the definition even clearer; this time we use the idea of neighbourhood:

> We say that $a_n \to l$ as $n \to \infty$ iff given any (acceptable) error $\epsilon > 0$ eventually a_n is in the ϵ - neighbourhood of l.

It is important to note that the definition of the limit of a sequence doesn't have a simpler form. If you think you have an easier version, talk it over with a tutor; you may find that it picks up as convergent some sequences you don't want to be convergent. In Fig 2.2, we give a picture that may help. The ϵ- neighbourhood of the (potential) limit l is represented by the shaded strip, while individual members a_n of the sequence are shown as blobs. The definition then says the sequence is convergent to the number we have shown as a potential limit, provided the sequence is eventually in the shaded strip: and this must be true even if we redraw the shaded strip to be narrower, as long as it is still centred on the potential limit.

---

[1] I need to assume the sequence is infinite; you can decide for yourself whether this is a philosophical statement, a statement about the future of the universe, or just plain optimism!

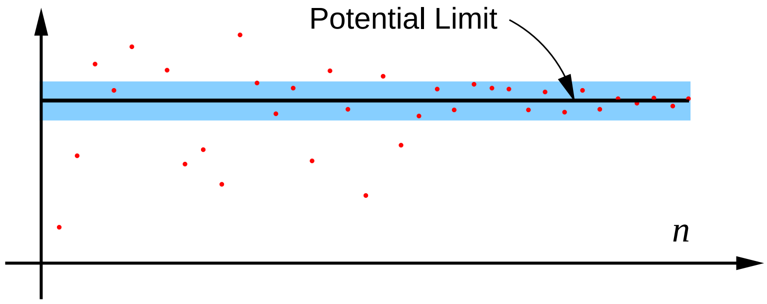


Figure 2.2: A picture of the definition of convergence

2.2 Direct Consequences

With this language we can give some simple examples for which we can use the definition directly.

- If $a_n \to 2$ as $n \to \infty$, then (take $\epsilon = 1$), eventually, a_n is within a distance 1 of 2. One consequence of this is that eventually $a_n > 1$ and another is that eventually $a_n < 3$.

- Let $a_n = 1/n$. Then $a_n \to 0$ as $n \to \infty$. To check this, pick $\epsilon > 0$ and then choose N with $N > 1/\epsilon$. Now suppose that $n \geq N$. We have

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon \quad \text{by choice of } N.$$

- The sequence $a_n = n - 1$ is divergent; for if not, then there is some l such that $a_n \to l$ as $n \to \infty$. Taking $\epsilon = 1$, we see that eventually (say after N) , we have $-1 \leq (n-1) - l < 1$, and in particular, that $(n-1) - l < 1$ for all $n \geq N$. thus $n < l + 2$ for all n, which is a contradiction.

2.5. Exercise. Show that the sequence $a_n = (1/\sqrt{n}) \to 0$ as $n \to \infty$.

Although we can work directly from the definition in these simple cases, most of the time it is too hard. So rather than always working directly, we also use the definition to prove some general tools, and then use the tools to tell us about convergence or divergence. Here is a simple tool (or Proposition).

2.6. Proposition. *Let $a_n \to l$ as $n \to \infty$ and assume also that $a_n \to m$ as $n \to \infty$. Then $l = m$. In other words, if a sequence has a limit, it has a unique limit, and we are justified in talking about* ***the*** *limit of a sequence.*

Proof. Suppose that $l \neq m$; we argue by contradiction, showing this situation is impossible. Using 1.7, we choose disjoint neighbourhoods of l and m, and note that since the sequence converges, eventually it lies in each of these neighbourhoods; this is the required contradiction. □

We can argue this directly (so this is another version of this proof). Pick $\epsilon = |l - m|/2$. Then eventually $|a_n - l| < \epsilon$, so this holds e.g.. for $n \geq N_1$. Also, eventually $|a_n - m| < \epsilon$, so this holds eg. for $n \geq N_2$. Now let $N = \max(N_1, N_2)$, and choose $n \geq N$. Then both inequalities hold, and

$$\begin{aligned} |l - m| &= |l - a_n + a_n - m| \\ &\leq |l - a_n| + |a_n - m| \quad \text{by the triangle inequality} \\ &< \epsilon + \epsilon = |l - m| \end{aligned}$$

2.7. Proposition. *Let $a_n \to l \neq 0$ as $n \to \infty$. Then eventually $a_n \neq 0$.*

Proof. Remember what this means; we are guaranteed that from some point onwards, we *never* have $a_n = 0$. The proof is a variant of "if $a_n \to 2$ as $n \to \infty$ then eventually $a_n > 1$." One way is just to repeat that argument in the two cases where $l > 0$ and then $l < 0$. But we can do it all in one:

Take $\epsilon = |l|/2$, and apply the definition of "$a_n \to l$ as $n \to \infty$". Then there is some N such that

$$\begin{aligned} |a_n - l| &< |l|/2 \quad \text{for all } n \geq N \\ \text{Now} \quad l &= l - a_n + a_n. \\ \text{Thus} \quad |l| &\leq |l - a_n| + |a_n|, \quad \text{so} \quad |l| \leq |l|/2 + |a_n|, \\ \text{and} \quad |a_n| &\geq |l|/2 \neq 0. \end{aligned}$$

□

2.8. Exercise. Let $a_n \to l \neq 0$ as $n \to \infty$, and assume that $l > 0$. Show that eventually $a_n > 0$. In other words, use the first method suggested above for $l > 0$.

2.3 Sums, Products and Quotients

2.9. Example. Let $a_n = \dfrac{n+2}{n+3}$. Show that $a_n \to 1$ as $n \to \infty$.

Solution. There is an obvious manipulation here:-

$$a_n = \frac{n+2}{n+3} = \frac{1 + 2/n}{1 + 3/n}.$$

We hope the numerator converges to $1 + 0$, the denominator to $1 + 0$ and so the quotient to $(1 + 0)/(1 + 0) = 1$. But it is not obvious that our definition does indeed behave as we would wish; we need rules to justify what we have done. Here they are:-

2.10. Theorem. ***(New Convergent sequences from old)*** *Let $a_n \to l$ and $b_n \to m$ as $n \to \infty$. Then*

Sums: *$a_n + b_n \to l + m$ as $n \to \infty$;*

Products: *$a_n b_n \to lm$ as $n \to \infty$; and*

Inverses: *provided $m \neq 0$ then $a_n/b_n \to l/m$ as $n \to \infty$.*

Note that part of the point of the theorem is that the new sequences are *convergent.*

Proof. Pick $\epsilon > 0$; we must find N such that $|a_n + b_n - (l + m) < \epsilon$ when $n \geq N$. Now because First pick $\epsilon > 0$. Since $a_n \to l$ as $n \to \infty$, there is some N_1 such that $|a_n - l| < \epsilon/2$ whenever $n > N_1$, and in the same way, there is some N_2 such that $|b_n - m| < \epsilon/2$ whenever $n > N_2$. Then if $N = \max(N_1, N_2)$, and $n > N$, we have

$$|a_n + b_n - (l + m)| < |a_n - l| + |b_n - m| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

The other two results are proved in the same way, but are technically more difficult. Proofs can be found in (Spivak 1967). □

2.11. Example. Let $a_n = \dfrac{4 - 7n^2}{n^2 + 3n}$. Show that $a_n \to -7$ as $n \to \infty$.

Solution. A helpful manipulation is easy. We choose to divide both top and bottom by the highest power of n around. This gives:

$$a_n = \frac{4 - 7n^2}{n^2 + 3n} = \frac{\frac{4}{n^2} - 7}{1 + \frac{3}{n}}.$$

We now show each term behaves as we expect. Since $1/n^2 = (1/n).(1/n)$ and $1/n \to 0$ as $n \to \infty$, we see that $1/n^2 \to 0$ as $n \to \infty$, using "product of convergents is convergent". Using the corresponding result for sums shows that $\frac{4}{n^2} - 7 \to 0 - 7$ as $n \to \infty$. In the same way, the denominator $\to 1$ as $n \to \infty$. Thus by the "limit of quotients" result, since the limit of the denominator is $1 \neq 0$, the quotient $\to -7$ as $n \to \infty$.

2.12. Example. In equation 2.1 we derived a sequence (which we claimed converged to $\sqrt[3]{2}$) from Newton's method. We can now show that *provided the limit exists and is non zero*, the limit is indeed $\sqrt[3]{2}$.

Proof. Note first that if $a_n \to l$ as $n \to \infty$, then we also have $a_{n+1} \to l$ as $n \to \infty$. In the equation

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{2}{3a_n^2}$$

we now let $n \to \infty$ on both sides of the equation. Using Theorem 2.10, we see that the right hand side converges to $\dfrac{2}{3}l + \dfrac{2}{3l^2}$, while the left hand side converges to l. But they are the same sequence, so both limits are the same by Prop 2.6. Thus

$$l = \frac{2}{3}l + \frac{2}{3l^2} \quad \text{and so } l^3 = 2.$$

□

2.13. Exercise. Define the sequence $\{a_n\}$ by $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (4a_n + 2)/(a_n + 3)$ for $n \geq 1$. Assuming that $\{a_n\}$ is convergent, find its limit.

2.14. Exercise. Define the sequence $\{a_n\}$ by $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (2a_n + 2)$ for $n \geq 1$. Assuming that $\{an\}$ is convergent, find its limit. Is the sequence convergent?

2.15. Example. Let $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Show that $a_n \to 0$ as $n \to \infty$.

Proof. A simple piece of algebra gets us most of the way:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) . \frac{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} \\ &= \frac{(n+1) - n}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

□

2.4 Squeezing

Actually, we can't take the last step yet. It is true and looks sensible, but it is another case where we need more results getting new convergent sequences from old. We really want a good dictionary of convergent sequences.

The next results show that order behaves quite well under taking limits, but also shows why we need the dictionary. The first one is fairly routine to prove, but you may still find these techniques hard; if so, note the result, and come back to the proof later.

2.16. Exercise. Given that $a_n \to l$ and $b_n \to m$ as $n \to \infty$, and that $a_n \le b_n$ for each n, then $l \le m$.

Compare this with the next result, where we can also *deduce* convergence.

2.17. Lemma. ***(The Squeezing lemma)*** *Let $a_n \le b_n \le c_n$, and suppose that $a_n \to l$ and $c_n \to l$ as $n \to \infty$. The $\{b_n\}$ is convergent, and $b_n \to l$ as $n \to \infty$.*

Proof. Pick $\epsilon > 0$. Then since $a_n \to l$ as $n \to \infty$, we can find N_1 such that

$$|a_n - l| < \epsilon \quad \text{for} \quad n \ge N_1$$

and since $c_n \to l$ as $n \to \infty$, we can find N_2 such that

$$|c_n - l| < \epsilon \quad \text{for} \quad n \ge N_2.$$

Now pick $N = \max(N_1, N_2)$, and note that, in particular, we have

$$-\epsilon < a_n - l \quad \text{and} \quad c_n - l < \epsilon.$$

Using the given order relation we get

$$-\epsilon < a_n - l \le b_n - l \le c_n - l < \epsilon,$$

and using only the middle and outer terms, this gives

$$-\epsilon < b_n - l < \epsilon \quad \text{or} \quad |b_n - l| < \epsilon \quad \text{as claimed.}$$

□

Note: Having seen the proof, it is clear we can state an "eventually" form of this result. We don't need the inequalities to hold all the time, only eventually.

2.18. Example. Let $a_n = \dfrac{\sin(n)}{n^2}$. Show that $a_n \to 0$ as $n \to \infty$.

Solution. Note that, whatever the value of $\sin(n)$, we always have $-1 \le \sin(n) \le 1$. We use the squeezing lemma:

$$-\frac{1}{n^2} < a_n < \frac{1}{n^2}. \quad \text{Now} \quad \frac{1}{n^2} \to 0, \quad \text{so} \quad \frac{\sin(n)}{n^2} \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

2.19. Exercise. Show that $\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} \to 1$ as $n \to \infty$.

Note: We can now do a bit more with the $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ example. We have

$$0 \le \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \le \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

so we have our result since we showed in Exercise 2.5 that $(1/\sqrt{n}) \to 0$ as $n \to \infty$.

This illustrates the need for a good bank of convergent sequences. In fact we don't have to use ad-hoc methods here; we can get such results in much more generality. We need the next section to prove it, but here is the results.

2.20. Proposition. *Let f be a continuous function at a, and suppose that $a_n \to a$ as $n \to \infty$. Then $f(a_n) \to f(a)$ as $n \to \infty$.*

Note: This is another example of the "new convergent sequences from old" idea. The application is that $f(x) = x^{1/2}$ is continuous everywhere on its domain which is $\{x \in \mathbb{R} : x \ge 0\}$, so since $n^{-1} \to 0$ as $n \to \infty$, we have $n^{-1/2} \to 0$ as $n \to \infty$; the result we proved in Exercise 2.5.

2.21. Exercise. What do you deduce about the sequence $a_n = \exp(1/n)$ if you apply this result to the continuous function $f(x) = \mathrm{e}^x$?

2.22. Example. Let $a_n = \dfrac{1}{n \log n}$ for $n \ge 2$. Show that $a_n \to 0$ as $n \to \infty$.

Solution. Note that $1 \le \log n \le n$ if $n \ge 3$, because $\log(e) = 1$, log is monotone increasing, and $2 < e < 3$. Thus $n < n \log n < n^2$, when $n \ge 3$ and

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n \log n} < \frac{1}{n}. \quad \text{Now} \quad \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{and} \quad \frac{1}{n^2} \to 0, \quad \text{so} \quad \frac{1}{n \log n} \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

Here we have used the "eventually" form of the squeezing lemma.

2.23. Exercise. Let $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n} \log n}$ for $n \ge 2$. Show that $a_n \to 0$ as $n \to \infty$.

2.5 Bounded sequences

2.24. Definition. Say that $\{a_n\}$ is a **bounded** sequence iff there is some K such that $|a_n| \leq K$ for all n.

This definition is correct, but not particularly useful at present. However, it does provide good practice in working with abstract formal definitions.

2.25. Example. Let $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\log n}$ for $n \geq 2$. Show that $\{a_n\}$ is a bounded sequence. [This is the sequence of Exercise 2.23].

2.26. Exercise. Show that the sum of two bounded sequences is bounded.

2.27. Proposition. *An eventually bounded sequence is bounded*

Proof. Let $\{a_n\}$ be an eventually bounded sequence, so there is some N, and a bound K such that $|a_n| \leq K$ for all $n \geq N$. Let $L = \max\{|a_1|, |a_2, \dots |a_{N-1}|, K\}$. Then by definition $|a_1| \leq L$, and indeed in the same way, $|a_k| \leq L$ whenever $k < N$. But if $n \geq N$ then $|a_n| \leq K \leq L$, so in fact $|a_n| \leq L$ for all n, and the sequence is actually bounded. □

2.28. Proposition. *A convergent sequence is bounded*

Proof. Let $\{a_n\}$ be a convergent sequence, with limit l say. Then there is some N such that $|a_n - l| < 1$ whenever $n \geq N$. Here we have used the definition of convergence, taking ϵ, our pre-declared error, to be 1. Then by the triangle inequality,

$$|a_n| \leq |a_n - l| + |l| \leq 1 + |l| \quad \text{for all } n \geq N.$$

Thus the sequence $\{a_n\}$ is eventually bounded, and so is bounded by Prop 2.27. □

And here is another result on which to practice working from the definition. In order to tackle simple proofs like this, you should start by writing down, using the definitions, the information you are given. Then write out (in symbols) what you wish to prove. Finally see how you can get from the known information to what you need. Remember that if a definition contains a variable (like ϵ in the definition of convergence), then the definition is true *whatever* value you give to it — even if you use $\epsilon/2$ (as we did in 2.10) or ϵ/K, for any constant K. Now try:

2.29. Exercise. Let $a_n \to 0$ as $n \to \infty$ and let $\{b_n\}$ be a bounded sequence. Show that $a_n b_n \to 0$ as $n \to \infty$. [If $a_n \to l \neq 0$ as $n \to \infty$, and $\{b_n\}$ is a bounded sequence, then in general $\{a_n b_n\}$ is *not* convergent. Give an example to show this.]

2.6 Infinite Limits

2.30. Definition. Say that $a_n \to \infty$ as $n \to \infty$ iff given K, there is some N such that $a_n \geq K$ whenever $n \geq N$.

This is just one definition; clearly you can have $a_n \to -\infty$ etc. We show how to use such a definition to get some results rather like those in 2.10. For example, we show

$$a_n = \frac{n^2 + 5n}{3n + 2} \to \infty \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

Pick some K. We have $a_n = n.\left(\dfrac{n+5}{3n+2}\right) = n.b_n$ (say). Using results from 2.10, we see that $b_n \to 1/3$ as $n \to \infty$, and so, eventually, $b_n > 1/6$ (Just take $\epsilon = 1/6$ to see this). Then for large enough n, we have $a_n > n/6 > K$, providing in addition $n > 6K$. Hence $a_n \to \infty$ as $n \to \infty$.

Note: It is *false* to argue that $a_n = n.(1/3) \to \infty$; you can't let one part of a limit converge without letting the other part converge! And we refuse to do arithmetic with ∞ so can't hope for a theorem directly like 2.10.

Antwoorden en uitwerkingen van chapter 2:

2.5 We are to prove:

$$\forall \epsilon > 0 \,\exists N \in N \,[\,\forall n \in N \quad \text{with} \quad n \leq N : |\frac{1}{\sqrt{n}} - 0| < \epsilon]$$

Let $\epsilon > 0$. First we solve

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$$

Solution: $n > \frac{1}{\epsilon^2}$.

Let N be the smallest integer greater than $\frac{1}{\epsilon^2}$. Then

$$\frac{1}{N} < \epsilon^2$$

and because $N > 0$ en $\epsilon > 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} < \epsilon$$

If $n \in N$ with $n \leq N$ then

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{N}} < \epsilon$$

2.8 In de following the character L is used instead of l for better readability.
Idea: $L \neq 0$, so, if $|L - a_n|$ is small enough, $a_n \neq 0$.
Because of the definition there is a $N \in N$ such that

$$\forall n \in N \quad \text{with} \quad n \leq N : |a_n - L| < \frac{1}{2}|L|$$

Now it is clear that for such a_n the distance to 0 is more than $\frac{1}{2}|L|$, so $a_n > 0$.
If you want to prove this, split the distance and see that it is large enough using 1.13:

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq ||a_n - L| - L|$$

Now $|a_n - L| < \frac{1}{2}|L|$, so $|L| - |a_n - l| > 0$, so we get

$$= |L| - |a_n - L| > |L| - \frac{1}{2}|L| = \frac{1}{2}|L| > 0$$

2.13. If $n \mapsto a_n$ is convergent, say its limit is L, then

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4a_n + 2}{a_n + 3} = \frac{4L + 2}{L + 3}$$

according to 2.10.
(In fact we have to exclude the possibility that L could be -3, but it is clear that, if a_n is near to -3, then a_{n+1} is wide away from -3, so it is clear that L can not be -3. We will not prove that exactly here.) Now the sequence $n \to a_{n+1}$ has limit L, so taking de limit of both sides we get

$$L = \frac{4L + 2}{L + 3}$$

Solving this equation to L we find: $L = 2$ or $L = -1$. When the sequence starts with $a_1 = 1$, it is clear that each following element is positive. (In fact, this argument uses mathematical induction.) So $L \geq 0$.
Conclusion: the limit is 2 if the sequence converges.

2.14 The same arguments as in the previous exercise yield:

$$L = 2L + 2$$

so $L = -2$. That means that the limit of this sequence is -2 if the array converges. However, it does not!

2.16 Suppose that $l > m$. Consider the sequence $n \mapsto a_n - b_n$. Its limit is $l - m$ which is positive. According to the result of 2.8, eventually $a_n - b_n$ is positive, in contradiction with the given fact that $a_n \leq b_n$ for each n. Conclusion: $l \leq m$.

2.19 In this special case two methods are available; it is important to be able to use both methods!

a. With the squeezing lemma 2.17:

Just a test: $\sqrt{1 + \frac{1}{100}} = 1.00499$. Hypothesis: $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{2n}$. Squaring this inequality and elaborating presents the idea for the following:

$$1 < 1 + \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2} = (1 + \frac{1}{2n})^2$$

Now $x \mapsto \sqrt{x}$ is an ascending function, so

$$1 < \sqrt{1 + \frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{2n}$$

As $\lim_{n\to\infty} 1 = 1 = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2n}$ (prove this for your self) we get with 2.17:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

b. With continuous functions (2.20):

First prove yourself that

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

Apply 2.20 for the continuous function $x \mapsto \sqrt{x}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = \sqrt{1} = 1$$

2.21 This sequence converges to $e^0 = 1$.

2.23 If $x \geq 2$ then $\ln(x) \geq \ln(2) > \frac{1}{2}$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n}\log(n)} < \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

It is easy to prove that $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$. Now use the squeezing lemma.

2.25

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}\log(2)}$$

2.26 If $\forall n : \quad |a_n| < M$ and $|b_n| < N$, then for all n: $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < M + N$ (using 1.11). So $n \mapsto a_n + b_n$ is bounded.

2.29 Let $\epsilon > 0$.
The sequence $n \mapsto b_n$ is bounded, say $|b_n| < M$ voor all n.
The sequence $n \mapsto a_n$ has limit 0, so there exists an N such that $|a_n - 0| < \frac{\epsilon}{M}$ for all $n \geq N$.
So $|a_n b_n - 0| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\epsilon}{M} \cdot M = \epsilon$.
Conclusion: the sequence $n \mapsto a_n b_n$ has limit 0.

Extra opgaven

opgave G2.1 — *inleveren*
Bewijs dat

$$\lim_{n\to\infty} {}^{10}\log(2+\frac{1}{n}) = {}^{10}\log(2)$$

Geef het bewijs netjes volgens de definitie van limiet, dus zonder allerlei extra stellingen te gebruiken: dit is puur een oefening in het hanteren van de definitie en het rekenen met logaritme.

opgave G2.2 —

Je gaat stelling (G2.3) op bldz. 103 hier bewijzen, dus het is niet de bedoeling die nu als bewijs te gebruiken..

a. Bewijs rechtsreeks vanuit de definitie van limiet: $\lim_{n\to\infty} n^3 = \infty$.

b. Bewijs rechtsreeks vanuit de definitie van limiet: $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{3}} = \infty$.

c. Bewijs rechtsreeks vanuit de definitie van limiet: $\lim_{n\to\infty} n^{-3} = 0$.

d. Bewijs rechtsreeks vanuit de definitie van limiet: $\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{3}} = 0$.

e. Bewijs met het gereedschap dat je hebt: als $-3 < a < \frac{1}{3}$ dan $\lim_{n\to\infty} n^a = 0$.

f. Facultatief: bewijs: als $a < 0$ dan $\lim_{n\to\infty} n^a = 0$.

g. Facultatief: bewijs: als $a > 0$ dan $\lim_{n\to\infty} n^a = \infty$.

opgave G2.3 — Theorem
Let $\forall n: \quad a_n \leq b_n$. Suppose that $a_n \to \infty$ as $n \to \infty$. Then $b_n \to \infty$ as $n \to \infty$.

You are invited to prove this theorem.

opgave G2.4 — *oefening*
Ga na of de volgende limieten bestaan, zo ja, bereken ze:

a.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n-1} - \frac{n^2}{n+1}\right)$$

b. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\log\left(\frac{n^2+n}{n-1}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{n^2}{n+1}\right)$

opgave G2.5 — *uitdager*

Ga na of $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$ bestaat en zo ja, bereken deze. Tip 1: schrijf de eerste 6 elementen van de rij uit.
Tip 2: zie het n-de element van die rij als product van n breuken, ga grof afronden, maar toch nog net zó dat je het squeezing lemma kunt gebruiken.

opgave G2.6 — *oefening*

a. Is the following true?

$$\text{If } a_n \to \infty \quad \text{as} \quad n \to \infty \quad \text{and} \quad a_n \neq 0 \quad \text{for any } n\text{, then} \quad \frac{1}{a_n} \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

If so, prove it, if not, give a counterexample.

b. Is the following true?

$$\text{If } a_n \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty \quad \text{and} \quad a_n \neq 0 \quad \text{for any } n\text{, then} \quad \frac{1}{a_n} \to \infty \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

If so, prove it, if not, give a counterexample.

opgave G2.7 — *oefening*

a. Waar of niet waar? Laat twee rijen positieve getallen a en b gegeven zijn met

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Dan

$$\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$$

Bewijs of weerleg.

b. Laat de rijen a en b gegeven zijn met

$$a_n = \frac{n^2+1}{n+2}$$

$$b_n = \frac{n^2-1}{n-2}$$

waar de index loopt vanaf $n = 3$. Ga na of de volgende limieten bestaan en bereken de bestaande limieten:

$$\lim_{n\to\infty} a_n, \quad \lim_{n\to\infty} b_n, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}, \quad \lim_{n\to\infty} a_n - b_n$$

Vergeet niet je uitkomsten te controleren met de antwoorden achter in dit boek!

c. Waar of niet waar? Laat twee rijen positieve getallen a en b gegeven zijn met

$$\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$$

Dan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Bewijs of weerleg.

bij Ian Craw: Intro Calculus and Analysis Chapter G4

Limits and Continuity

(G4.1) intuïtieve definitie: *Een functie f noemen we* **continu** *in (het getal) a als je $f(a)$ kunt 'berekenen' (kunt benaderen binnen een gegeven nauwkeurigheid) door een getal a' voldoende dicht bij a te nemen en dan $f(a')$ uit te rekenen en dat resultaat als (benadering van) $f(a)$ te nemen.*

Je kunt dit zó zien: als iemand jou een nauwkeurigheid geeft, zeg maximale afwijking in de berekening ϵ (> 0 uiteraard), dat jij dan kunt aangeven hoe dicht je a' bij a in de buurt moet nemen om $f(a)$ te mogen benaderen met $f(a')$.
Dat 'hoe dicht bij' kun je vastleggen door een maximale afstand aan te geven, zeg δ (met $\delta > 0$). Iemand geeft jou dus een ϵ en jij zegt dan: als $\mid a' - a \mid < \delta$, dan 'voldoet' $f(a')$, d.w.z. $\mid f(a') - f(a) \mid < \epsilon$.

(G4.2) uitgebreide wiskundige definitie: *De functie f is* **continu** *in (het getal) a als:*

Bij iedere nauwkeurigheid (error) $\epsilon > 0$
is er een afstand (distance) $\delta > 0$ zodat
voor iedere x die δ-dicht bij a ligt (d.w.z. $|x - a| < \delta$)
is $f(x)$ een ϵ-nauwkeurige benadering van $f(a)$ (d.w.z. $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Dit benaderen gaat natuurlijk alleen goed als je van a en van getallen vlak bij a ook inderdaad de functiewaarde kunt uitrekenen. De vraag of de reële functie $x \mapsto \sqrt{-x^2}$ continu in 0 is, is niet zinnig: weliswaar heeft deze functie in 0 een functiewaarde, maar niet daarbuiten, (aangezien we hier alleen maar over reële functies praten, dus complexe getallen niet toestaan).

(G4.3) korte wiskundige definitie: *Een functie f noemen we* **continu** *in (het getal) a als*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in R \quad [\text{ als } |x - a| < \delta \quad \text{dan} \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon\,]$$

Deze definitie mag alleen worden toegepast, als er getallen b en c zijn zodat ofwel:

- $b < a < c$ *en* $< b, c > \;\subset$ *het domein van f*
- $b = a < c$ *en* $[b, c > \;\subset$ *het domein van f*
- $b < a = c$ *en* $< b, c] \;\subset$ *het domein van f*

Opgave

opgave G4.1 — *oefening*
Neem $f: \quad x \mapsto x^{10}$ en kijk naar benaderingen van $f(\pi)$ (dus neem $a = \pi$).

a. Hoe nauwkeurig (ongeveer) moet je π decimaal benaderen om daarmee $f(\pi) = \pi^{10}$ in 8 cijfers nauwkeurig te benaderen?
b. Hoe nauwkeurig (ongeveer) moet je π benaderen om daarmee $f(\pi) = \pi^{10}$ met een nauwkeurigheid van ϵ te benaderen, als $0 < \epsilon < 1$?

(G4.4) definitie: *Een functie heet* **continu** *als die functie continu is in ieder element van zijn domein.*

(G4.5) stelling:

a. Als f en g continu zijn. dan zijn ook

$$f+g, \quad f-g, \quad f*g, \quad f/g, \quad f\circ g$$

continu. (Let wel op de betreffende domeinen!)

b. Veelterm-functies zijn continu.

c. Rationale functies (veelterm gedeeld door veelterm) zijn continu.

d. Als g een reëel getal is met $g>0$ en $g\neq 1$, dan zijn $x\mapsto g^x$ en $x\mapsto {}^g\log(x)$ continu.

e. $\sin, \cos$ *en tan zijn continu, en ook hun inverse functies* $\arcsin, \arccos, \arctan$.

Het **berekenen van een limiet van een functie** f in een origineel a, dus $\lim_{x\to a}$, gaat als volgt:

- Als f continu in a is, neem dan $f(a)$:

$$\lim_{x\to a} = f(a)$$

- Anders, als je de functie f kunt vervangen door een functie g die
  - hetzelfde domein als f heeft behalve dat a misschien niet in het domein van f maar wel in het domein van g zit,
  - terwijl g wel continu in a is,

  neem dan $g(a)$:

$$\lim_{x\to a} = g(a)$$

  Dit laatste heet wel het ‘repareren’ van f.

Bovenstaande definitie is goed dank zij de volgende stelling, die we hier niet gaan bewijzen.

(G4.6) stelling: *Als f en g continu in a zijn en*

- *er is een $b<a$ zodat $f(x)=g(x)$ voor alle $x\in<b,a>$*
- *of er is een $b>a$ zodat $f(x)=g(x)$ voor alle $x\in<a,b>$*

dan f(a)=g(a).

Je kunt het begrip limiet ook geheel analoog aan het begrip continu zien:

(G4.7) definitie-variant van limiet: *De functie f heeft* **limiet** *L in (het getal) a ($\lim_{x\to a} f(x)=L$) als:*

Bij iedere nauwkeurigheid (error) $\epsilon>0$

is er een afstand (distance) $\delta>0$ zodat

voor iedere x die δ-dicht bij a ligt en ongelijk aan a is, (d.w.z. $0<|x-a|<\delta$)

is $f(x)$ een ϵ-nauwkeurige benadering van L (d.w.z. $|f(x)-L|<\epsilon$.

Kort:

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x \quad [\,0<|x-a|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-L|<\epsilon\,]$$

Oneigenlijke limieten zijn varianten op het begrip limiet:

(G4.8) definitie:

a. De zin

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

betekent dat $f(x)$ alle grenzen te boven gaat als x voldoende dicht bij a ligt; concreet:

voor alle $G \in R$ is er een $\delta > 0$ zodat

voor alle x met $a - \delta < x < a + \delta$ en $x \neq a$ geldt $f(x) > G$

b. De zin

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

betekent dat $f(x)$ alle grenzen te onder gaat als x voldoende dicht bij a ligt; concreet:

voor alle $G \in R$ is er een $\delta > 0$ zodat

voor alle x met $a - \delta < x < a + \delta$ en $x \neq a$ geldt $f(x) < G$

c. De zin

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = L$$

betekent dat $f(x)$ willekeurig dicht bij L komt, als je x maar voldoende groot neemt:

voor alle $\epsilon > 0$ is er een $M \in R$ zodat voor alle x met $x > M$ geldt $|f(x) - L| < \epsilon$

d. De zin

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$

betekent dat $f(x)$ willekeurig dicht bij L komt, als je x maar voldoende negatief neemt:

voor alle $\epsilon > 0$ is er een $M \in R$ (denk aan een heel negatieve M) zodat voor alle x met $x < M$ geldt $|f(x)$

(G4.9) *voorbeeld:*

Let op:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$$

bestaat niet, want links van 1, vlak bij 1 krijg je heel negatieve getallen, rechts juist heel grote positieve getallen. Maar

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

einde voorbeeld

Chapter 4

Limits and Continuity

4.1 Classes of functions

We first met a sequence as a particularly easy sort of function, defined on $\mathbb{N}$, rather than $\mathbb{R}$. We now move to the more general study of functions. However, our earlier work wasn't a diversion; we shall see that sequences prove a useful tool both to investigate functions, and to give an idea of appropriate methods.

Our main reason for being interested in studying functions is as a model of some behaviour in the real world. Typically a function describes the behaviour of an object over time, or space. In selecting a suitable class of functions to study, we need to balance generality, which has chaotic behaviour, with good behaviour which occurs rarely. If a function has lots of good properties, because there are strong restrictions on it, then it can often be quite hard to show that a given example of such a function has the required properties. Conversely, if it is easy to show that the function belongs to a particular class, it may be because the properties of that class are so weak that belonging may have essentially no useful consequences. We summarise this in the table:

Strong restrictions	Weak restrictions
Good behaviour	Bad behaviour
Few examples	Many examples

It turns out that there are a number of "good" classes of functions which are worth studying. In this chapter and the next ones, we study functions which have steadily more and more restrictions on them. Which means the behaviour steadily improves; and at the same time, the number of examples steadily decreases. A perfectly general function has essentially nothing useful that can be said about it; so we start by studying **continuous** functions, the first class that gives us much theory.

In order to discuss functions sensibly, we often insist that we can "get a good look" at the behaviour of the function at a given point, so typically we restrict the domain of the function to be well behaved.

4.1. Definition. A subset U of $\mathbb{R}$ is **open** if given $a \in U$, there is some $\delta > 0$ such that $(a - \delta, a + \delta) \subseteq U$.

In fact this is the same as saying that given $a \in U$, there is some open interval containing a which lies in U. In other words, a set is open if it contains a neighbourhood of each of its points. We saw in 1.10 that an open interval is an open set. This definition has the effect that if a function is defined on an open set we can look at its behaviour near the point a of interest, from both sides.

4.2 Limits and Continuity

We discuss a number of functions, each of which is worse behaved than the previous one. Our aim is to isolate an imprtant property of a function called **continuity**.

4.2. Example. 1. Let $f(x) = \sin(x)$. This is defined for all $x \in \mathbb{R}$.

[*Recall we use radians automatically in order to have the derivative of* $\sin x$ *being* $\cos x$.]

2. Let $f(x) = \log(x)$. This is defined for $x > 0$, and so naturally has a restricted domain. Note also that the domain is an open set.

3. Let $f(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$ when $x \neq a$, and suppose $f(a) = 2a$.

4. Let $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{when } x \neq 0, \\ = 1 & \text{if } x = 0. \end{cases}$

5. Let $f(x) = 0$ if $x < 0$, and let $f(x) = 1$ for $x \geq 0$.

6. Let $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ when $x \neq 0$ and let $f(0) = 0$.

In each case we are trying to study the behaviour of the function near a particular point. In example 1, the function is well behaved everywhere, there are no problems, and so there is no need to pick out particular points for special care. In example 2, the function is still well behaved wherever it is defined, but we had to restrict the domain, as promised in Sect. 1.5. In all of what follows, we will assume the domain of all of our functions is suitably restricted.

We won't spend time in this course discussing standard functions. It is assumed that you know about functions such as $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\log x$, $\exp x$, $\tan^{-1} x$ and $\sin^{-1} x$, as well as the "obvious" ones like polynomials and rational functions — those functions of the form $p(x)/q(x)$, where p and q are polynomials. In particular, it is assumed that you know these are differentiable everywhere they are defined. We shall see later that this is quite a strong piece of information. In particular, it means they are examples of continuous functions. Note also that even a function like $f(x) = 1/x$ is continuous, because, wherever it is defined (ie on $\mathbb{R} \setminus \{0\}$), it is continuous.

In example 3, the function is not defined at a, but rewriting the function

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a \quad \text{if } x \neq a,$$

we see that as x approaches a, where the function is not defined, the value of the function approaches $2a$. It thus seems very *reasonable* to extend the definition of f by defining $f(a) = 2a$. In fact, what we have observed is that

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} (x + a) = 2a.$$

We illustrate the behaviour of the function for the case when $a = 2$ in Fig 4.1

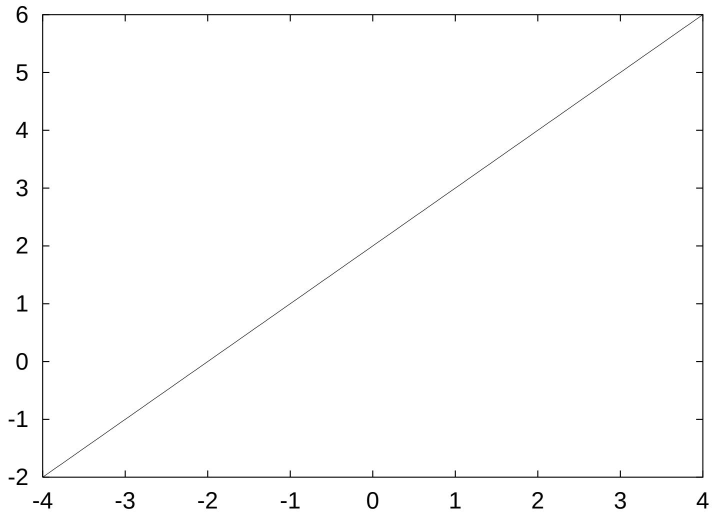


Figure 4.1: Graph of the function $(x^2 - 4)/(x - 2)$ The automatic graphing routine does not even notice the singularity at $x = 2$.

In this example, we can argue that the use of the $(x^2 - a^2)/(x - a)$ was perverse; there was a more natural definition of the function which gave the "right" answer. But in the case of $\sin x/x$, example 4, there was no such definition; we are forced to make the two part definition, in order to define the function "properly" everywhere. So we again have to be careful near a particular point in this case, near $x = 0$. The function is graphed in Fig 4.2, and again we see that the graph shows no evidence of a difficulty at $x = 0$

Considering example 5 shows that these limits need not always exist; we describe this by saying that the limit from the left and from the right both exist, but differ, and the function has a *jump discontinuity* at 0. We sketch the function in Fig 4.3.

In fact this is not the worst that can happen, as can be seen by considering example 6. Sketching the graph, we note that the limit at 0 does not even exists. We prove this in more detail later in 4.23.

The crucial property we have been studying, that of having a definition at a point which is the "right" definition, given how the function behaves near the point, is the property of **continuity**. It is closely connected with the existence of limits, which have an accurate definition, very like the "sequence" ones, and with very similar properties.

4.3. Definition. Say that $f(x)$ **tends to** l as $x \to a$ iff given $\epsilon > 0$, there is some $\delta > 0$ such that whenever $0 < |x - a| < \delta$, then $|f(x) - l| < \epsilon$.

Note that we *exclude* the possibility that $x = a$ when we consider a limit; we are *only* interested in the behaviour of f near a, but not at a. In fact this is very similar to the definition we used for sequences. Our main interest in this definition is that we can now describe continuity accurately.

4.4. Definition. Say that f is **continuous at** a if $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Equivalently, f is continuous at a iff given $\epsilon > 0$, there is some $\delta > 0$ such that whenever $|x - a| < \delta$, then $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

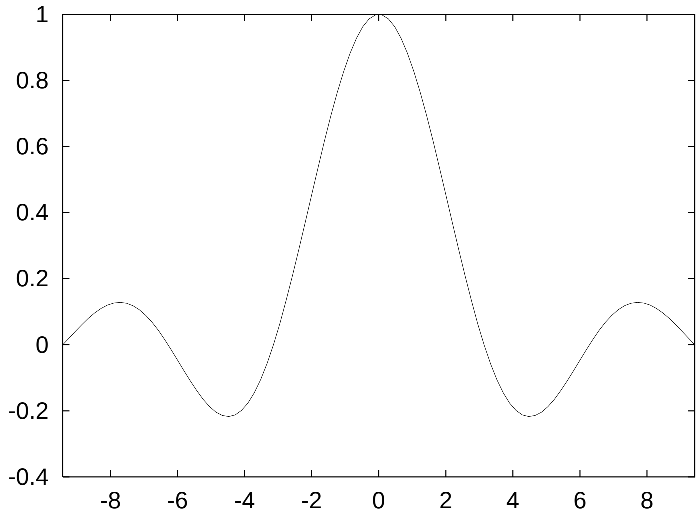


Figure 4.2: Graph of the function $\sin(x)/x$. Again the automatic graphing routine does not even notice the singularity at $x = 0$.

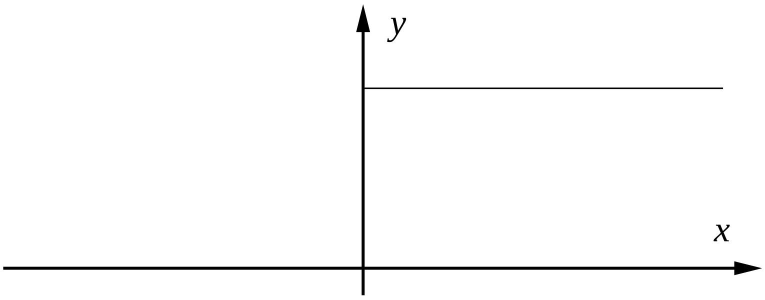


Figure 4.3: The function which is 0 when $x < 0$ and 1 when $x \geq 0$; it has a jump discontinuity at $x = 0$.

Note that in the "epsilon - delta" definition, we no longer need exclude the case when $x = a$. Note also there is a good geometrical meaning to the definition. Given an error ϵ, there is *some* neighbourhood of a such that if we stay in that neighbourhood, then f is trapped within ϵ of its value $f(a)$.

We shall not insist on this definition in the same way that the definition of the convergence of a sequence was emphasised. However, all our work on limts and continuity of functions can be traced back to this definition, just as in our work on sequences, everything could be traced back to the definition of a convergent sequence. Rather than do this, we shall state without proof a number of results which enable continuous functions both to be recognised and manipulated. So you are expected to know the definition, and a few simply $\epsilon - \delta$ proofs, but you can apply (correctly - and always after checking that any needed conditions are satisfied) the standard results we are about to quote in order to do required manipulations.

4.5. Definition. Say that $f : U(open) \to \mathbb{R}$ is **continuous** if it is continuous at each point

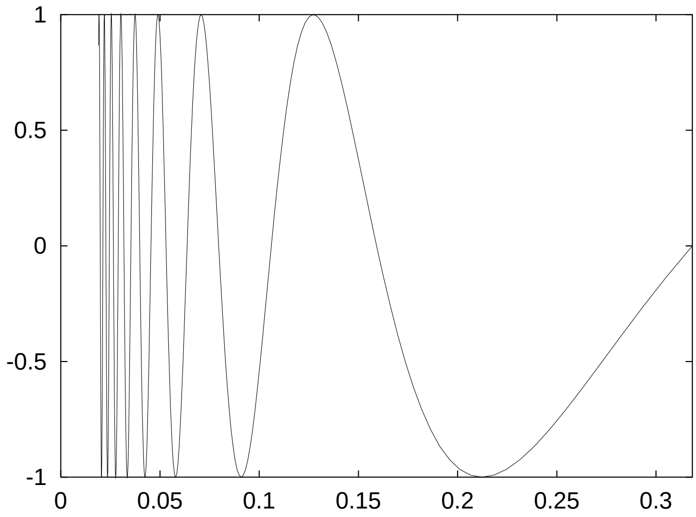


Figure 4.4: Graph of the function $\sin(1/x)$. Here it is easy to see the problem at $x = 0$; the plotting routine gives up near this singularity.

$a \in U$.

Note: This is important. The function $f(x) = 1/x$ is defined on $\{x : x \neq 0\}$, and is a continuous function. We cannot usefully define it on a larger domain, and so, by the definition, it is continuous. This is an example where the naive "can draw it without taking the pencil from the paper" definition of continuity is not helpful.

4.6. Example. Let $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ for $x \neq 2$. Show how to define $f(2)$ in order to make f a continuous function at 2.

Solution. We have

$$\frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)} = (x^2 + 2x + 4)$$

Thus $f(x) \to (2^2 + 2.2 + 4) = 12$ as $x \to 2$. So defining $f(2) = 12$ makes f continuous at 2, (and hence for all values of x).

[Can you work out why this has something to do with the derivative of $f(x) = x^3$ at the point $x = 2$?]

4.7. Exercise. Let $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ for $x \neq 4$. Show how to define $f(4)$ in order to make f a continuous function at 4.

Sometimes, we can work out whether a function is continuous, directly from the definition. In the next example, it looks as though it is going to be hard, but turns out to be quite possible.

4.8. Example. Let $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$ Then f is continuous at 0.

Solution. We prove this directy from the definition, using that fact that, for all x, we have $|\sin(x) \leq 1|$. Pick $\epsilon > 0$ and choose $\delta = \epsilon$ [We know the answer, but $\delta = \epsilon/2$, or any value of δ with $0 < \delta \leq \epsilon$ will do]. Then if $|x| < \delta$,

$$\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x|. \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \delta \leq \epsilon$$

as required. Note that this is an example where the product of a continuous and a discontinuous function is continuous. The graph of this function is shown in Fig 4.5.

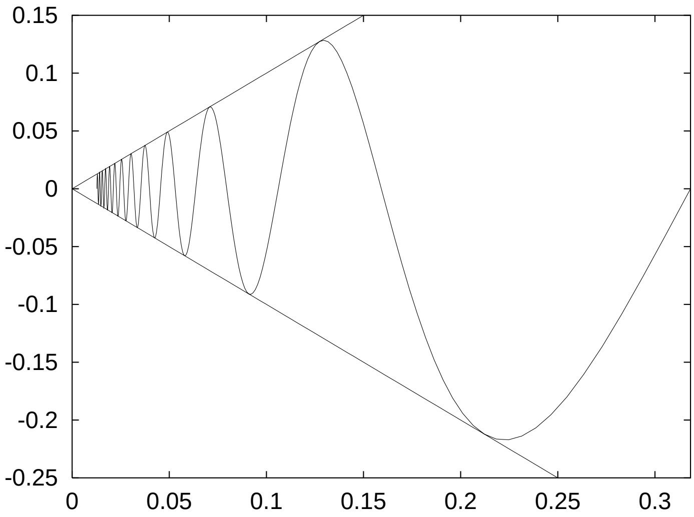


Figure 4.5: Graph of the function $x. \sin(1/x)$. You can probably see how the discontinuity of $sin(1/x)$ gets absorbed. The lines $y = x$ and $y = -x$ are also plotted.

4.3 One sided limits

Although sometimes we get results directly, it is usually helpful to have a larger range of techniques. We give one here and more in section 4.4.

4.9. Definition. Say that $\lim_{x \to a-} f(x) = l$, or that f has a **limit from the left** iff given $\epsilon > 0$, there is some $\delta > 0$ such that whenever $a - \delta < x < a$, then $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

There is a similar definition of "limit from the right", writen as $\lim_{x \to a+} f(x) = l$

4.10. Example. Define $f(x)$ as follows:-

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{if } x < 2; \\ 2 & \text{if } x = 2; \\ x/2 & \text{if } x > 2. \end{cases}$$

Calculate the left and right hand limits of $f(x)$ at 2.

Solution. As $x \to 2-$, $f(x) = 3 - x \to 1+$, so the left hand limit is 1. As $x \to 2+$, $f(x) = x/2 \to 1+$, so the right hand limit is 1. Thus the left and right hand limits agree (and disagree with $f(2)$, so f is not continuous at 2).

Note our convention: if $f(x) \to 1$ and always $f(x) \geq 1$ as $x \to 2-$, we say that $f(x)$ tends to 1 **from above**, and write $f(x) \to 1+$ etc.

4.11. Proposition. *If* $\lim_{x\to a} f(x)$ *exists, then both one sided limts exist and are equal. Conversely, if both one sided limits exits and are equal, then* $\lim_{x\to a} f(x)$ *exists.*

This splits the problem of finding whether a limit exists into two parts; we can look on either side, and check first that we have a limit, and second, that we get the same answer. For example, in 4.2, example 5, both 1-sided limits exist, but are not equal. There is now an obvious way of checking continuity.

4.12. Proposition. (Continuity Test) *The function f is continuous at a iff both one sided limits exits and are equal to $f(a)$.*

4.13. Example. Let $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{for } x \leq 1, \\ x & \text{for } x \geq 1. \end{cases}$ Show that f is continuous at 1. [In fact f is continuous everywhere].

Solution. We use the above criterion. Note that $f(1) = 1$. Also

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} x^2 = 1 \quad \text{while} \quad \lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} x = 1 = f(1).$$

so f is continuous at 1.

4.14. Exercise. Let $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{for } x < 0, \\ \cos x & \text{for } x \geq 0. \end{cases}$ Show that f is continuous at 0. [In fact f is continuous everywhere]. [Recall the result of 4.2, example 4]

4.15. Example. Let $f(x) = |x|$. Then f is continuous in $\mathbb{R}$.

Solution. Note that if $x < 0$ then $|x| = -x$ and so is continuous, while if $x > 0$, then $|x| = x$ and so also is continuous. It remains to examine the function at 0. From these identifications, we see that $\lim_{x\to 0-} |x| = 0+$, while $\lim_{x\to 0+} |x| = 0+$. Since $0+ = 0- = 0 = |0|$, by the 4.12, $|x|$ is continuous at 0

4.4 Results giving Coninuity

Just as for sequences, building continuity directly by calculating limits soon becomes hard work. Instead we give a result that enables us to build new continuous functions from old ones, just as we did for sequences. Note that if f and g are functions and k is a constant, then $k.f$, $f+g$, fg and (often) f/g are also functions.

4.16. Proposition. *Let f and g be continuous at a, and let k be a constant. Then $k.f$, $f+g$ and fg are continuous at f. Also, if $g(a) \neq 0$, then f/g is continuous at a.*

Proof. We show that $f+g$ is continuous at a. Since, by definition, we have $(f+g)(a) = f(a)+g(a)$, it is enough to show that

$$\lim_{x \to a}(f(x)+g(x)) = f(a)+g(a).$$

Pick $\epsilon > 0$; then there is some δ_1 such that if $|x-a| < \delta_1$, then $|f(x)-f(a)| < \epsilon/2$. Similarly there is some δ_2 such that if $|x-a| < \delta_2$, then $|g(x)-g(a)| < \epsilon/2$. Let $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, and pick x with $|x-a| < \delta$. Then

$$|f(x)+g(x)-(f(a)+g(a))| \leq |f(x)-f(a)| + |g(x)-g(a)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

This gives the result. The other results are similar, but rather harder; see (Spivak 1967) for proofs. □

Note: Just as when dealing with sequences, we need to know that f/g is defined in some neighbourhood of a. This can be shown using a very similar proof to the corresponding result for sequences.

4.17. Proposition. *Let f be continuous at a, and let g be continuous at $f(a)$. Then $g \circ f$ is continuous at a*

Proof. Pick $\epsilon > 0$. We must find $\delta > 0$ such that if $|x-a| < \delta$, then $g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$. We find δ using the given properties of f and g. Since g is continuous at $f(a)$, there is some $\delta_1 > 0$ such that if $|y - f(a)| < \delta_1$, then $|g(y) - g(f(a))| < \epsilon$. Now use the fact that f is continuous at a, so there is some $\delta > 0$ such that if $|x-a| < \delta$, then $|f(x) - f(a)| < \delta_1$. Combining these results gives the required inequality. □

4.18. Example. The function in Example 4.8 is continuous everywhere. When we first studied it, we showed it was continuous at the "difficult" point $x = 0$. Now we can deduce that it is continuous everywhere else.

4.19. Example. The function $f : x \longmapsto \sin^3 x$ is continuous.

Solution. Write $g(x) = \sin(x)$ and $h(x) = x^3$. Note that each of g and h are continuous, and that $f = g \circ h$. Thus f is continuous.

4.20. Example. Let $f(x) = \tan\left(\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right)$. Show that f is continuous at every point of its domain.

Solution. Let $g(x) = \dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$. Since $-1 < g(x) < 1$, the function is properly defined for all values of x (whilst $\tan x$ is undefined when $x = (2k+1)\pi/2$), and the quotient is continuous, since each term is, and since $x^2+a^2 \neq 0$ for any x. Thus f is continuous, since $f = \tan \circ g$.

4.21. Exercise. Let $f(x) = \exp\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)$. Write down the domain of f, and show that f is continuous at every point of its domain.

As another example of the use of the definitions, we can give a proof of Proposition 2.20

4.22. Proposition. *Let f be a continuous function at a, and let $a_n \to a$ as $n \to \infty$. Then $f(a_n) \to f(a)$ as $n \to \infty$.*

Proof. Pick $\epsilon > 0$ we must find N such that $|a_n - f(a)| < \epsilon$ whenever $n \geq N$. Now since f is continuous at a, we can find δ such that if $|x - a| < \delta$, then $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Also, since $a_n \to a$ as $n \to \infty$ there is some N (taking δ for our epsilon — but anything smaller, like $\delta = \epsilon/2$ etc would work) such that $|a_n - a| < \delta$ whenever $n \geq N$. Combining these we see that if $n \geq N$ then $|a_n - f(a)| < \epsilon$, as required. □

We can consider the example $f(x) = \sin(1/x)$ with this tool.

4.23. Example. Suppose that $\lim_{x\to 0} \sin(1/x) = l$; in other words, assume, to get a contradiction, that the limit exists. Let $x_n = 1/(\pi n)$; then $x_n \to 0$ as $n \to \infty$, and so by assumption, $\sin(1/x_n) = \sin(n\pi) = 0 \to l$ as $n \to \infty$. Thus, just by looking at a single sequence, we see that the limit (if it exists) can only be l. But instead, consider the sequence $x_n = 2/(4n+1)\pi$, so again $x_n \to 0$ as $n \to \infty$. In this case, $\sin(1/x_n) = \sin((4n+1)\pi/2) = 1$, and we must also have $l = 1$. Thus l does not exist.

Note: Sequences often provide a quick way of demonstrating that a function is *not* continuous, while, if f is well behaved on *each* sequence which converges to a, then in fact f is continuous at a. The proof is a little harder than the one we have just given, and is left until next year.

4.24. Example. We know from Prop 4.22 together with Example 4.8 that if $a_n \to 0$ as $n \to \infty$, then

$$a_n \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

Prove this directly using squeezing.

Solution. The proof is essentially the same as the proof of Example 4.8. We have

$$0 \leq \left|a_n \sin\frac{1}{a_n}\right| = |a_n|.\left|\sin\frac{1}{a_n}\right| \leq |a_n| \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

4.5 Infinite limits

There are many more definitions and results about limits. First one that is close to the sequence definition:

4.25. Definition. Say that $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ iff given $\epsilon > 0$, there is some K such that whenever $x > K$, then $|f(x) - l| < \epsilon$.

4.26. Example. Evaluate $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{3x^2+2x+1}$.

Solution. The idea here should be quite familiar from our sequence work. We use the fact that $1/x \to 0$ as $x \to \infty$. Thus

$$\frac{x^2+3}{3x^2+2x+1} = \frac{1+3/x^2}{3+2/x+1/x^2} \to \frac{1}{3} \quad \text{as} \quad x \to \infty.$$

4.27. Definition. Say that $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ iff given $L > 0$, there is some K such that whenever $x > K$, then $f(x) > L$.

The reason for working on proofs from the definition is to be able to check what results of this type are trivially true without having to find it in a book. For example

4.28. Proposition. *Let $g(x) = 1/f(x)$. Then $g(x) \to 0+$ as $x \to \infty$ iff $f(x) \to \infty$ as $x \to \infty$. Let $y = 1/x$. Then $y \to 0+$ as $x \to \infty$; conversely, $y \to \infty$ as $x \to 0+$*

Proof. Pick $\epsilon > 0$. We show there is some K such that if $x > K$, then $0 < y < \epsilon$; indeed, simply take $K = 1/\epsilon$. The converse is equally trivial. ☐

4.6 Continuity on a Closed Interval

So far our results have followed because f is continuous at a particular point. In fact we get the best results from assuming rather more. Indeed the results in this section are precisely why we are interested in discussing continuity in the first place. Although some of the results are "obvious", they only follow from the continuity property, and indeed we present counterexamples whenever that fails. So in order to be able to use the following helpful results, we must first be able to check our functions satisfy the hypothesis of continuity. That task is of course what we have just been concentrating on.

4.29. Definition. Say that f is continuous on $[a, b]$ iff f is continuous on (a, b), and if, in addition, $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$, and $\lim_{x\to b-} f(x) = f(b)$.

We sometimes refer to f as being continuous on a compact interval. Such an f has some very nice properties.

4.30. Theorem (Intermediate Value Theorem). *Let f be continuous on the compact interval $[a, b]$, and assume that $f(a) < 0$ and $f(b) > 0$. Then there is some point c with $a < c < b$ such hat $f(c) = 0$.*

Proof. We make no attempt to prove this formally, but sketch a proof with a pair of sequences and a repeated bisection argument. It is also noted that each hypothesis is necessary. ☐

4.31. Example. Show there is at least one root of the equation $x - \cos x = 0$ in the interval $[0, 1]$.

Proof. Apply the Intermediate Value Theorem to f on the closed interval $[0, 1]$. The function is continuous on that interval, and $f(0) = -1$, while $f(1) = 1 - \cos(1) > 0$. Thus there is some point $c \in (0, 1)$ such that $f(c) = 0$ as required. ☐

4.32. Exercise. Show there is at least one root of the equation $x - \mathrm{e}^{-x} = 0$ in the interval $(0, 1)$.

4.33. Corollary. *Let f be continuous on the compact interval $[a, b]$, and assume there is some constant h such that $f(a) < h$ and $f(b) > h$. Then there is a point c with $a < c < b$ such that $f(c) = h$.*

Proof. Apply the Intermediate Value Theorem to $f - h$ on the closed interval $[0, 1]$. Note that by considering $-f + h$ we can cope with the case when $f(a) > h$ and $f(b) < h$. □

Note: This theorem is the reason why continuity is often loosely described as a function you can draw without taking your pen from the paper. As we have seen with $y = 1/x$, this can give an inaccurate idea; it is in fact more akin to connectedness.

4.34. Theorem. (Boundedness) *Let f be continuous on the compact interval $[a, b]$. Then there are constants M and m such that $m < f(x) < M$ for all $x \in [a, b]$. In other words, we are guaranteed that the graph of f is bounded both above and below.*

Proof. This again uses the completeness of $\mathbb{R}$, and again no proof is offered. Note also that the hypotheses are all needed. □

4.35. Theorem. (Boundedness) *Let f be continuous on the compact interval $[a, b]$. Then there are points x_0 and x_1 such that $f(x_0) < f(x) < f(x_1)$ for all $x \in [a, b]$. In other words, we are guaranteed that the graph of f is bounded both above and below, and that these global extrema are actually attained.*

Proof. This uses the completeness of $\mathbb{R}$, and follows in part from the previous result. If M is the least upper bound given by theorem 4.34. Consider the function $g(x) = (M - f(x))^{-1}$. This is clearly continuous. If there is some point at which $f(y) = M$, there is nothing to prove; otherwise g(x) is defined everywhere, and is continuous, and hence bounded. This contradicts the fact that M was a least upper bound for f.

Note also that the hypotheses are all needed. □

(G4.10) stelling, aanvulling bij 4.17: *Als*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

en g is continu in L, dan

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(L)$$

Deze stelling kun je niet alleen toepassen voor $a \in R$, maar ook voor de oneigenlijke limieten met $x \to \infty$ of $x \to -\infty$. Bovendien kun je de stelling ook toepassen als $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ op de functie $x \mapsto e^x$ als je rekent met $e^{-\infty} = 0$.

Antwoorden bij opgaven uit chapter 4

4.7 For $x \neq 4$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

Now $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ is continuous on $[0, \infty >$, so by defining $f(4) := \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$ we get a function that is continuous on $[0, \infty >$, so continuous in 4.

4.14 We use 4.12:

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} = \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{\searrow 0} f(x) = \lim_{\searrow 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$$

$$f(0) = \cos(0) = 1$$

So all **three** numbers are equal, so f is continuous in 0.

4.21 The maximal domain is: the real numbers except for x where $1 - x^2 = 0$, so except for $-1, 1$. In that range $x \to \frac{1+x^2}{1-x^2}$ is a quotient of continous functions, the second of which is nonzero for each x, so it is continuous. Moreover $x \mapsto e^x$ is continous on R, so -using 4.17- we get that f is continous.

4.32 Let f be defined on $[0, 1]$ by $f(x) = x - e^{-x}$. Now $f(0) = -1$ and $f(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$, and f is continuous, so by the Intermediate Value Theorem there is a number c between 0 en 1 with $f(c) = 0$.

extra opgaven:

opgave G4.2 — *oefening*
Bereken zo mogelijk:

a. $\lim_{x \to 0} e^{\frac{x}{(x+3)^2}}$

b. $\lim_{x \to -3} e^{\frac{x}{x+3}}$

c. $\lim_{x \to -3} e^{\frac{x}{(x+3)^2}}$

d. $\lim_{x \to \infty} e^{\frac{x}{x+3}}$

e. $\lim_{x \to \infty} e^{\frac{x}{(x+3)^2}}$

f. $\lim_{x \to \infty} e^{\frac{x}{(x+3)^2}}$

bij Ian Craw: Intro Calculus and Analysis Chapter G5

Differentiability

Hier zijn vier goed te gebruiken visies op de afgeleide van een in a differentieerbare functie f. Eerst drie gelijkwaardige definities voor de afgeleide.

(G5.1) Drie gelijkwaardige definities voor differentieerbaarheid: *We zeggen dat f differentieerbaar is in a als*

a. Er is een getal r (denk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn) en een functie ϵ zodat voor 'alle' h:

$$f(a+h) = f(a) + r \cdot h + \epsilon(h) \quad \text{met} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\epsilon(h)}{h} = 0$$

Bij $\epsilon(h)$ moet je denken aan de afwijking tussen de grafiek en de raaklijn.
In bovenstaande ligt r vast. (Hier geen bewijs.) We noemen $f'(a) := r$.

b. Er is een continue functie R zodat

$$f(a+h) = f(a) + R(h) \cdot h$$

We definieren nu $f'(a) := R(0)$.

Door in de formule van a te definieren: $R(h) := r + \dfrac{\epsilon(h)}{h}$ krijg je onmiddellijk de formulering van b.

c. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ *bestaat en die noemen we $f'(a)$.*
De laatste formulering is gemakkelijk uit a of b af te leiden.

Voor benaderingen denk je vaak volgens a., bij bewijzen gebruik je vaak b. en voor het berekenen van de afgeleide gebruik je vaak c. Eén van de vele toepassingen van de eerste formule is het **schatten van afwijkingen** t.g.v. afwijkingen (afrondfouten b.v.) in gegevens. Een voorbeeld daarvan zie je in opgave G5.2 op bldz. 542. Diezelfde methode kan ook gebruikt worden voor het geval je meer dan één getal met afwijking in een formule wilt invullen, maar daar gaan we nu niet aan werken.

Er is nog een belangrijke stelling die bij de voorgaande formules aansluit; het is in wezen een heel handige variant op Theorem 5.18 (**Mean Value Theorem**):

(G5.2) stelling: *Laat f differentieerbaar zijn in een omgeving van a. Dan is er bij 'iedere' h (zodat $a + h$ in die omgeving zit) een getal λ met $0 < \lambda < h$ zodat*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a + \lambda \cdot h) \cdot h$$

Uit die stelling kun je de volgende verbanden tussen stijgen en dalen van een functie en positief / negatief zijn van de functiewaarden van de afgeleide bewijzen. Eerst even voor de volledigheid enkele definities:

(G5.3) definitie: *Laat f een functie zijn met domein D. Laat V een deelverzameling van D zijn. Dan*

a. f heet **stijgend** *op V als voor iedere $x, y \in V$ met $x < y$ geldt: $f(x) < f(y)$.*

b. f heet **zwak stijgend** *op V als voor iedere $x, y \in V$ met $x < y$ geldt: $f(x) \leq f(y)$.*

c. f heet **dalend** *op V als voor iedere $x, y \in V$ met $x < y$ geldt: $f(x) > f(y)$.*

d. f heet **zwak dalend** *op V als voor iedere $x, y \in V$ met $x < y$ geldt: $f(x) \geq f(y)$.*

Let op: $x \mapsto \frac{1}{x}$ is dalend op $< 0, \infty >$ en ook op $< -\infty, 0 >$, maar niet op zijn hele domein, want $-2 < 3$, maar toch niet $-\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$.

(G5.4) stelling: *Laat f een continue functie op $[a,b]$ zijn, die differentieerbaar is op $< a,b >$, waarbij $a < b$.*

a. Als $f'(x) > 0 \quad \forall x \in < a,b >$, dan is f stijgend op $[a,b]$.
Let op: niet omgekeerd: voorbeeld: $x \mapsto x^3$ op $[-1,1]$.

b. Als $f'(x) < 0 \quad \forall x \in < a,b >$, dan is f dalend op $[a,b]$.
(Ook weer niet omgekeerd!)

c. $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in < a,b >$ dan en slechts dan als f zwak stijgend is op $[a,b]$.

d. $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in < a,b >$ dan en slechts dan als f zwak dalend is op $[a,b]$.

e. $f'(x) = 0 \quad \forall x \in < a,b >$ dan en slechts dan als f constant is op $[a,b]$.

Hier volgt nog een lijstje met rekenregels: laat f en g differentieerbare functies zijn en c een reëel getal.

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(f-g)' = f' - g'$
- $(f * g)' = f' * g + f * g'$
- $(\frac{f}{g})' = \dfrac{f' * g - f * g'}{g^2}$
- $(f \circ g)' = g' * (f' \circ g)$

Hier volgt nog een

(G5.5) lijst van standaardafgeleiden:

- *de afgeleide van $x \mapsto x^n$ is $x \mapsto n \cdot x^{n-1}$ waar n een constante is.*
- *de afgeleide van* $\sin$ *is* $\cos$
- *de afgeleide van* $\cos$ *is* $-\sin$
- *de afgeleide van* $\tan$ *is* $x \mapsto \dfrac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$
- *de afgeleide van* $\arcsin$ *is* $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- *de afgeleide van* $\arccos$ *is* $x \mapsto \dfrac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$
- *de afgeleide van* $\arctan$ *is* $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$
- *de afgeleide van* $\exp$ *is* $x \mapsto e^x$
- *de afgeleide van $x \mapsto a^x$ is $x \mapsto a^x \cdot \ln(a)$*
- *de afgeleide van* $\ln$ *is* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$
- *de afgeleide van* ${}^a\log$ *is* $x \mapsto \dfrac{1}{x \cdot \ln(a)}$

(G5.6) methode: *De afgeleide is een prima hulpmiddel om stijgen en dalen te onderzoeken. Dat kan goed van pas komen bij*

- *het oplossen van ongelijkheden; voor het onderzoeken van stijgen en dalen moet je wel weer een nieuwe ongelijkheid oplossen en soms kun je dat doen met hetzelfde idee, door nog een keer te differentiëren (enz.);*
- *het onderzoeken van stijgen of dalen van rijen gedefinieerd door een direkte formule, die in feite een functie op N (of een deel daarvan) is: die functie kun je vaak uitbreiden tot een functie op R en daarvan stijgen/dalen onderzoeken;*

- *Door middel van functies recursief gedefinieerde rijen, met name iteratierijen (zie chapter 3: Monontone convergence).*

opgave G5.1 — *oefening*
Gebruik bovenstaande ideeën:

a. Los op: $?x \in R^+ : \quad \frac{1}{x} - \ln(x) > 1$

b. Los op: $?x \in R : \quad x - \sin(x) > 3\pi$

c. Los op: $?x \in R : \quad \sqrt{9 + x^2} - x > 1.$

Correcties

bldz.50 in de formulering van de Taylor stelling: in de formule voor $P_n(x)$ ontbreken puntjes:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

bldz. 50 regel 9 van onder: in die formule moet niet $f'(x)$ maar $f'(a)$ staan. Twee regels er onder gaat het op dezelfde manier mis: niet $f'(x)$ maar $f'(a)$, bovendien moet 2! vervangen worden door n!.

Op bldz 51 onderaan moet in dat rechtse rijtje telkens x door 0 vervangen worden, dus $f'(0)$ i.p.v. $f'(x)$, enz.
Precies hetzelfde moet veranderd worden op bldz.52 in example 5.33, direct bij het begin van “Solution”. Daaronder staat:

Thus by Taylor’s theorem, . . .

en in die volgende formule moet de exponent van (-1) niet $n + 1$ maar n zijn.
In 5.4 Proposition: . . . are differentiable at a. . . .

In 5.18: vierde regel van onder: ”. . . Also, $h(b) = 0$ and h(a)=0. . . . ”

In 5.30 Example, de eerste formule, vierde term rechts van de = veranderen:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$$

en net zo corrigeren in de volgende formule.

5.33 Example: aan de rechterkant van het rijtje formules staat eerst $f(0) = 0$. Daaronder staat $f'(x) = 1$, dat moet zijn: $f'(0) = 1$. Daaronder net zo verbeteren.

5.36 Example. Dezelfde correcties als bij 5.33

De formulering van **Taylor’s theorem** (theorem 5.29) is wat verwarrend: je leest daar dat die functie R_n toegepast op x iets oplevert met die c er in, maar wat je je moet realiseren is dat die c zelf weer van x afhangt: ”where c is some point between a and x” en dan wel een punt waar je geen vat op hebt i.h.a.: c echt berekenen voor gegeven x is in principe lastig. Maar bedenk dat als je x verandert, dan verandert c i.h.a. ook!

In het kader van benaderen kun je Taylor’ Theorem ook goed zo formuleren:

(G5.7) Taylor's Theorem: *Let f be continuous on a neighbourhood of a and assume that $f', f"", \ldots f^{(n+1)}$ is defined on this neighourhood. Then, if $a+h$ is in this neighourhood of a:*

$$f(a+h) = P_n(a,h) + R_n(a,h)$$

where $P_n(a,h)$ is the Taylor polynomial approximation of $f(a+h)$:

$$P_n(a,h) = f(a) + f'(a)\cdot h + \frac{1}{2!}f''(a)\cdot h^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\cdot h^n$$

and $R_n(a,h)$ the "remainder", say, the error of the approximation

$$R_n(a,h) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\cdot h^{n+1}$$

where c is some number lieing in between a and $a+h$.

Antwoorden bij opgaven uit chapter 5

5.3

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

5.6 The domain is R without 1 and -1. The differentiability on this domain can be proven in quite te same way as in example 5.5. Moreover

$$f'(x) = \exp\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)\frac{2x(1-x^2)+2x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$$

5.13 For $x=0$ we get $\log(1+x) = \log(1) = 0$ and $\sin(x) = \sin(0) = 0$, so we can apply l'Hôpital:

$$(x\mapsto \log(1+x))' = (x\mapsto \frac{1}{1+x})$$

$$\sin' = \cos$$

So

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{\sin(x)} = \frac{\frac{1}{1+0}}{\cos(0)} = 1$$

5.17 $f: x\mapsto x-e^{-x}$ is a continuous function on $[0,1]$ and $f(0) = -1$ and $f(1) = 1-\frac{1}{e} > 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$, so by the Intermediate Value Theorem there is a c with $0<c<1$ and $f(c) = 0$.
Moreover $f'(x) = 1+e^{-x} > 0$ for all $x \in <0,1>$, so f is ascending on $[0,1]$. Therefore $f(x) < 0$ if $0\le x<c$ and $f(x) < 0$ if $c<x\le 1$, so c is the only root of the equation $x-e^{-x}$ in $<0,1>$.

5.20 By the Mean Value Theorem with $a=0$ and $b=\frac{\pi}{2}$ we get:

$$f(\frac{\pi}{2}) = f(0) + \frac{\pi}{2}\cdot f'(c) \quad \text{where} \quad 0<c<\frac{\pi}{2}$$

Substituting we get

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{5+\sin(c)}$$

As $0<\sin(c)<1$ for $0<c<\frac{\pi}{2}$ we get

$$\frac{\pi}{12} < f(\frac{\pi}{2}) < \frac{\pi}{10}$$

5.25 For $x = 0$ we get $x - \sin(x) = 0$ and $x\ \sin(x) = 0$, so we can apply l'Hôptial second edition:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin(x)}{x\ \sin(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x) + x\ \cos(x)}$$

Substituting 0 for x in the right hand side fraction, we get both numerator and denominator equal to zero, so we can apply l'Hôpital again:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \cos(x) - x \sin(x)} = \frac{0}{1 + 1 + o} = 0$$

5.27

$$\lim_{x \to \infty} x \sin(\frac{1}{x}) = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{y} \sin(y)$$

where we substitute y for $\frac{1}{x}$. So we get

$$\lim_{y \to 0+} \frac{\sin(y)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$$

Opgaven

opgave G5.2 — *oefening*
Gegeven is de functie f:

$$f: \quad x \mapsto \frac{10x^5 - x^3}{200x^4 - 3}$$

Bereken m.b.v. bovenstaande een schatting van de maximale afwijking van $f(a)$ als a een meetgetal met $a = 0.345$ met een maximale afwijking van 0.003.

(Zie ook opgave A.14 op bldz. 10.)

opgave G5.3 — *oefening*
Gegeven is de functie f op R^+:

$$f: \quad x \mapsto (1 - \frac{1}{x})^x$$

Beredeneer dat deze functie rechts van een getal naar eigen keuze dalend is.

Chapter 5

Differentiability

5.1 Definition and Basic Properties

In This section we continue our study of classes of functions which are suitably restricted. Again we are passing from the general to the particular. The next most particular class of function we study after the class of continuous functions is the class of differentiable functions. We discuss the definition, show how to get "new functions from old" in what by now is a fairly routine way, and prove that this is a smaller class: that every differentiable function is continuous, but that there are continuous functions that are not differentiable. Informally, the difference is that the graph of a differentiable function may not have any sharp corners in it.

As with continuous functions, our aim is to show that there are many attractive properties which hold for differentiable functions that don't hold in general for continuous functions. One we discuss in some detail is the ease with which certain limits can be evaluated, by introducing l'Hôpital's rule. Although we don't prove this, the corresponding results are false for continuous functions.

We take the view that much of this material has already been discussed last year, so we move fairly quickly over the basics.

5.1. Definition. Let U be an open subset of $\mathbb{R}$, and let $f : U \to \mathbb{R}$. We say that f is differentiable at $a \in U$ iff

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{or equivalently,} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{exists.}$$

The limit, if it exists, is written as $f'(a)$.

We say that f is differentiable in U if and only if it is differentiable at each a in U.

Note that the **Newton quotient** is not defined when $x = a$, nor need it be for the definition to make sense. But the Newton quotient, if it exists, can be extended to be a continuous function at a by defining its value at that point to be $f'(a)$. Note also the emphasis on the existence of the limit. Differentiation is as much about showing the *existence* of the derivative, as *calculating* the value of the derivative.

5.2. Example. Let $f(x) = x^3$. Show, directly from the definition, that $f'(a) = 3a^2$. Compare this result with 4.6.

Solution. This is just another way of asking about particular limits, like 4.2; we must compute

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+xa+a^2)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x^2+2xa+a^2)=3a^2.$$

5.3. Exercise. Let $f(x)=\sqrt{x}$. Show, directly from the definition, that $f'(a)=1/2\sqrt{a}$ when $a\neq 0$. What function do you have to consider in the particular case when $a=4$?

Just as with continuity, it is impractical to use this definition every time to compute derivatives; we need results showing how to differentiate the usual class of functions, and we assume these are known from last year. Thus we assume the rules for differentiation of sums products and compositions of functions, together with the known derivatives of elementary functions such as sin, cos and tan; their reciprocals sec, cosec and cot; and exp and log.

5.4. Proposition. *Let f and g be differentiable at a, and let k be a constant. Then $k.f$, $f+g$ and fg are differentiable at f. Also, if $g(a)\neq 0$, then f/g is differentiable at a. Let f be differentiable at a, and let g be differentiable at $f(a)$. Then $g\circ f$ is differentiable at a. In addition, the usual rules for calculating these derivatives apply.*

5.5. Example. Let $f(x)=\tan\left(\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right)$ for $a\neq 0$. Show that f is differentiable at every point of its domain, and calculate the derivative at each such point.

Solution. This is the same example we considered in 4.20. There we showed the domain was the whole of $\mathbb{R}$, and that the function was continuous everywhere. Let $g(x)=\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$. Then g is properly defined for all values of x, and the quotient is differentiable, since each term is, and since $x^2+a^2\neq 0$ for any x since $a\neq 0$. Thus f is differentiable using the chain rule since $f=\tan\circ g$, and we are assuming known that the elementary functions like tan are differentiable.

Finally to actually calculate the derivative, we have:-

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sec^2\left(\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right).\frac{(x^2+a^2).2x-((x^2-a^2).2x)}{(x^2+a^2)^2} \\ &= \frac{4a^2x}{(x^2+a^2)^2}.\sec^2\left(\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right). \end{aligned}$$

5.6. Exercise. Let $f(x)=\exp\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)$. Show that f is differentiable at every point of its domain, and calculate the derivative at each such point.

The first point in our study of differentiable functions is that it is *more* restrictive for a function to be differentiable, than simply to be continuous.

5.7. Proposition. *Let f be differentiable at a. Then f is continuous at a.*

Proof. To establish continuity, we must prove that $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Since the Newton quotient is known to converge, we have for $x \neq a$,

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.(x - a) \to f'(a).0 \quad \text{as } x \to a.$$

Hence f is continuous at a. □

5.8. Example. Let $f(x) = |x|$; then f is continuous everywhere, but *not* differentiable at 0.

Solution. We already know from Example 4.15 that $|x|$ is continuous. We compute the Newton quotient directly; recall that $|x| = x$ if $x \geq 0$, while $|x| = -x$ if $x < 0$. Thus

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1, \quad \text{while} \quad \lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1.$$

Thus both of the one-sided limits exist, but are unequal, so the limit of the Newton quotient does not exist.

5.2 Simple Limits

Our calculus of differentiable functions can be used to compute limits which otherwise prove troublesome.

5.9. Proposition (l'Hôpital's rule: simple form). *Let f and g be functions such that $f(a) = g(a) = 0$ while $f'(a)$ and $g'(a)$ both exits and $g'(a) \neq 0$. Then*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Proof. Since $f(a) = g(a) = 0$, provided $x \neq a$, we have

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \frac{x - a}{g(x) - g(a)} \to \frac{f'(a)}{g'(a)} \quad \text{as} \quad x \to a,$$

where the last limit exists, since $g'(a) \neq 0$. □

5.10. Remark. If $f'(a)$ and $g'(a)$ exist, computing $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ is easy by 4.16, since f and g must be continuous at a by Proposition 5.7, unless we get an indeterminate form $0/0$ or ∞/∞ for the formal quotient. In fact l'Hôpitals rule helps in both cases, although we need to develop stronger forms.

5.11. Example. Show that $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x - \sin x}{x} = 2$.

Solution. Note first that we cannot get the result trivially from 4.16, since since $g(a) = 0$ and so we get the indeterminate form $0/0$. However, we are in a position to apply the simple form of l'Hôpital, since $x' = 1 \neq 0$. Applying the rule gives

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x - \sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3 - \cos x}{1} = 2.$$

5.12. Example. Show that $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = 1/2$.

Solution. Note again that we cannot get the result trivially from 4.16, since this gives the indeterminate 0/0 form, because $g(a) = 0$. However, we are in a position to apply the simple form of l'Hôpital, since $x' = 1 \neq 0$. Applying the rule gives

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2^{-1}(1+x)^{-1/2}}{1} = 1/2.$$

5.13. Exercise. Evaluate $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{\sin x}$.

5.14. Example. (Spurious, but helps to remember!) Show that $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Solution. This is spurious because we need the limit to calculate the derivative in the first place, but applying l'Hôpital certainly gives the result.

5.3 Rolle and the Mean Value Theorem

We can combine our definition of derivative with the Intermediate Value Theorem to give a useful result which is in fact the basis of most elementary applications of the differential calculus. Like the results on continuous functions, it is a global result, and so needs continuity and differentiability on a whole interval.

5.15. Theorem (Rolle's Theorem). *Let f be continuous on $[a, b]$, and differentiable on (a, b), and suppose that $f(a) = f(b)$. Then there is some c with $a < c < b$ such that $f'(c) = 0$.*

Note: The theorem guarantees that the point c exists somewhere. It gives *no* indication of how to find c. Here is the diagram to make the point geometrically:

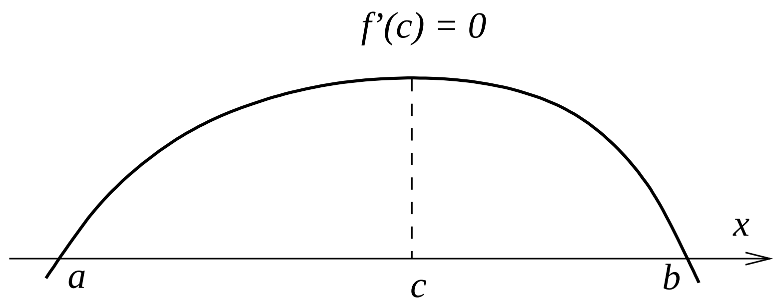


Figure 5.1: If f crosses the axis twice, somewhere between the two crossings, the function is flat. The accurate statement of this "obvious" observation is Rolle's Theorem.

Proof. Since f is continuous on the compact interval $[a, b]$, it has both a global maximum and a global minimum. Assume first that the global maximum occurs at an interior point $c \in (a, b)$. In what follows, we pick h small enough so that $c + h$ always lies in (a, b). Then

If $h > 0$, $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$, and so $\lim_{h \to 0+} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$, since we know the limit exists.

Similarly, if $h < 0$, $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$, and so $\lim_{h \to 0+} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$, since we know the limit exists. Combining these, we see that $f'(c) = 0$, and we have the result in this case.

A similar argument applies if, instead, the global minimum occurs at the interior point c. The remaining situation occurs if both the global maximum and global minimum occur at end points; since $f(a) = f(b)$, it follows that f is constant, and any $c \in (a, b)$ will do. □

5.16. Example. Investigate the number of roots of each of the polynomials

$$p(x) = x^3 + 3x + 1 \quad \text{and} \quad q(x) = x^3 - 3x + 1.$$

Solution. Since $p'(x) = 3(x^2 + 1) > 0$ for all $x \in \mathbb{R}$, we see that p has at most one root; for if it had two (or more) roots there would be a root of $p'(x) = 0$ between them by Rolle. Since $p(0) = 1$, while $p(-1) = -3$, there is at least one root by the Intermediate Value Theorem. Hence p has exactly one root.

We have $q'(x) = 3(x^2 - 1) = 0$ when $x = \pm 1$. Since $q(-1) = 3$ and $q(1) = -1$, there is a root of q between -1 and 1 by the Intermediate Value Theorem. Looking as $x \to \infty$ and as $x \to -\infty$ shows here are three roots of q.

5.17. Exercise. Show that the equation $x - \mathrm{e}^{-x} = 0$ has exactly one root in the interval $(0, 1)$.

Our version of Rolle's theorem is valuable as far as it goes, but the requirement that $f(a) = f(b)$ is sufficiently strong that it can be quite hard to apply sometimes. Fortunately the geometrical description of the result — that somewhere the tangent is parallel to the axis, does have a more general restatement.

5.18. Theorem (The Mean Value Theorem). *Let f be continuous on $[a, b]$, and differentiable on (a, b). Then there is some c with $a < c < b$ such that*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \textit{or equivalently} \quad f(b) = f(a) + (b - a)f'(c).$$

Proof. We apply Rolle to a suitable function; let

$$h(x) = f(b) - f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - x).$$

Then h is continuous on the interval $[a, b]$, since f is, and in the same way, it is differentiable on the open interval (a, b). Also, $f(b) = 0$ and $f(a) = 0$. We can thus apply Rolle's theorem to h to deduce there is some point c with $a < c < b$ such that $h'(c) = 0$. Thus we have

$$0 = h'(c) = -f'(c) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

which is the required result. □

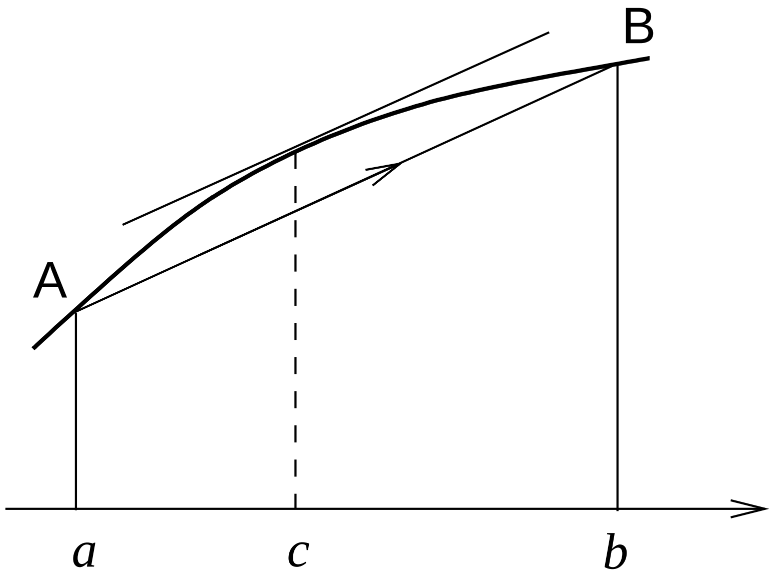


Figure 5.2: Somewhere inside a chord, the tangent to f will be parallel to the chord. The accurate statement of this common-sense observation is the Mean Value Theorem.

5.19. Example. The function f satisfies $f'(x) = \dfrac{1}{5 - x^2}$ and $f(0) = 2$. Use the Mean Value theorem to estimate $f(1)$.

Solution. We first estimate the given derivative for values of x satisfying $0 < x < 1$. Since for such x, we have $0 < x^2 < 1$, and so $4 < 5 - x^2 < 5$. Inverting we see that

$$\frac{1}{5} < f'(x) < \frac{1}{4} \quad \text{when} \quad 0 < x < 1.$$

Now apply the Mean Value theorem to f on the interval $[0, 1]$ to obtain some c with $0 < c < 1$ such that $f(1) - f(0) = f'(c)$. From the given value of $f(0)$, we see that $2.2 < f(1) < 2.25$

5.20. Exercise. The function f satisfies $f'(x) = \dfrac{1}{5 + \sin x}$ and $f(0) = 0$. Use the Mean Value theorem to estimate $f(\pi/2)$.

Note the "common sense" description of what we have done. If the derivative doesn't change much, the function will behave linearly. Note also that this gives meaning to the approximation

$$f(a + h) \approx f(a) + hf'(a).$$

We now see that the accurate version of this replaces $f'(a)$ by $f'(c)$ for some c between a and $a + h$.

5.21. Theorem. (The Cauchy Mean Value Theorem) *Let f and g be both continuous on $[a, b]$ and differentiable on (a, b). Then there is some point c with $a < c < b$ such that*

$$g'(c)\Big(f(b) - f(a)\Big) = f'(c)\Big(g(b) - g(a)\Big).$$

In particular, whenever the quotients make sense, we have

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Proof. Let $h(x) = f(x)\Big(g(b)-g(a)\Big) - g(x)\Big(f(b)-f(a)\Big)$, and apply Rolle's theorem exactly as we did for the Mean Value Theorem. Note first that since both f and g are continuous on $[a,b]$, and differentiable on (a,b), it follows that h has these properties. Also $h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b)$. Thus we may apply Rolle to h, to deduce there is some point c with $a < c < b$ such that $h'(c) = 0$. But

$$h'(c) = f'(c)\Big(g(b)-g(a)\Big) - g'(c)\Big(f(b)-f(a)\Big)$$

Thus

$$f'(c)\Big(g(b)-g(a)\Big) = g'(c)\Big(f(b)-f(a)\Big)$$

This is one form of the Cauchy Mean Value Theorem for f and g. If $g'(c) \neq 0$ for any possible c, then the Mean Value theorem shows that $g(b)-g(a) \neq 0$, and so we can divide the above result to get

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

giving a second form of the result. $\square$

Note: Taking $g(x) = x$ recovers the Mean Value Theorem.

5.4 l'Hôpital revisited

We can get a much more useful form of l'Hôpital's rule using the Cauchy Mean Value Theorem, rather than working, as we did in 5.9, directly from the definition of the derivative.

5.22. Proposition (l'Hôpital's rule: general form). . *Let f and g be functions such that $f(a) = g(a) = 0$, and suppose that f and g are differentiable on an open interval I containing a, and that $g'(x) \neq 0$, except perhaps at a. Then*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

provided the second limit exists.

Proof. Pick $x > a$ and apply the Cauchy Mean Value Theorem to the interval $[a,x]$, to find c with $a < c < x$ such that

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Then $\displaystyle\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, since we know the actual limit (not just the one sided limit) exists. Now repeat with $x < a$ to get the result. $\square$

5.23. Example. Evaluate $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

Solution. We have

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2},$$

where the use of l'Hôpital is justified since the second limit exists. Note that you **can't** differentiate top and bottom again, and still expect to get the correct answer; one of the hypotheses of l'Hôpital is that the first quotient is of the 0/0 form.

5.24. Example. Use l'Hôpital to establish the following:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{x^2} = -\frac{1}{8}.$$

Solution. We have

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1/2)(1+x)^{-1/2} - 1/2}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1/2)(-1/2)(1+x)^{-3/2}}{2} = \frac{-1}{8},$$

The use of l'Hôpital is justified the second time, since the third limit exists; since we now know the second limit exists, the use of l'Hôpital is justified the first time.

5.25. Exercise. Evaluate $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} \right) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x \sin x}$.

5.5 Infinite limits

We can use Proposition 4.28 to get results about infinite limits.

5.26. Example. Evaluate $\lim_{x\to\infty} x \log \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

Solution.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} x \log\left(1+\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+y)}{y} \quad \text{writing } y = 1/x, \\ &= \lim_{y\to 0+} \frac{\log(1+y)}{y} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1. \end{aligned}$$

The last step is valid, since the final limit exists by l'Hôpital; note also that this gives another way of finding $a_n = (1 + 1/n)^n$.

5.27. Exercise. Evaluate $\lim_{x\to\infty} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

5.28. Proposition (l'Hôpital's rule: infinite limits). *Let f and g be functions such that $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, and suppose that $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ exists. Then*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Proof. (Sketch for interest — not part of the course). Pick $\epsilon > 0$ and choose a such that

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \epsilon \quad \text{for all } x > a.$$

Then pick K such that if $x > K$, then $g(x) - g(a) \neq 0$. By Cauchy,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \quad \text{for all } x > K.$$

Note that although c depends on x, we always have $c > a$. Then

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}.\frac{f(x)}{f(x)-f(a)}.\frac{g(x)-g(a)}{g(x)},\\ &\to l.1.1 \quad \text{as } x \to \infty.\end{aligned}$$

□

5.5.1 (Rates of growth)

One interest in these results is to see how fast functions grow as $x \to \infty$. This is explored further in the exercises. But important results are:

- The function e^x increases faster than any power of x.
- x^α increases faster than any power of $\log x$ if $\alpha > 0$.

5.6 Taylor's Theorem

We have so far explored the Mean Value theorem, which can be rewritten as

$$f(a+h) = f(a) + hf'(c)$$

where c is some point between a and $a+h$. [By writing the definition of c in this way, we have a statement that works whether $h > 0$ or $h < 0$.] We have already met the approximation

$$f(a+h) \sim f(a) + hf'(a)$$

when we studied the Newton - Raphson method for solving an equation, and have already observed that the Mean Value Theorem provides a more accurate version of this. Now consider what happens when f is a polynomial of degree n

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n.$$

Note that $f(0) = a_0$. Differentiating gives

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \ldots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1},$$

and so $f'(0) = a_1$. Again, we have

$$f''(x) = 2a_2 + 3.2a_3x \ldots + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + n(n-1)a_nx^{n-2},$$

and $f''(0) = 2a_2$. After the next differentiation, we get $f'''(0) = 3!a_3$, while after k differentiations, we get, $f^{(k)}(0) = k!a_k$, provided $k \leq n$. Thus we can rewrite the polynomial, using its value, and the value of its derivatives at 0, as

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

This opens up the possibility of representing more general functions than polynomials in this way, and so getting a generalisation of the Mean Value Theorem.

5.29. Theorem (Taylors Theorem - Lagrange form of Remainder). *Let f be continuous on $[a, x]$, and assume that each of f', f'', $\ldots$, $f^{(n+1)}$ is defined on $[a, x]$. Then we can write*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

where $P_n(x)$, the Taylor polynomial of degree n about a, and $R_n(x)$, the corresponding remainder, are given by

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \\ R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \end{aligned}$$

where c is some point between a and x.

We make no attempt to prove this, although the proof can be done with the tools we have at our disposal. Some quick comments:

- the theorem is also true for $x < a$; just restate it for the interval $[x, a]$ etc;
- if $n = 0$, we have $f(x) = f(a) + (x-a)f'(c)$ for some c between a and x; this is a restatement of the Mean Value Theorem;
- if $n = 1$, we have

  $$f(x) = f(a) + (x-a)f'(x) + \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2$$

  for some c between a and x; this often called the **Second Mean Value Theorem**;
- in general we can restate **Taylor's Theorem** as

  $$f(x) = f(a) + (x-a)f'(x) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{2!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

  for some c between a and x;
- the special case in which $a = 0$ has a special name; it is called **Maclaurin's Theorem**;
- just as with Rolle, or the Mean Value Theorem, there is **no** useful information about the point c.

We now explore the meaning and content of the theorem with a number of examples.

5.30. Example. Find the Taylor polynomial of order n about 0 for $f(x) = \mathrm{e}^x$, and write down the corresponding remainder term.

Solution. There is no difficulty here in calculating derivatives — clearly $f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$ for all k, and so $f^{(k)}(0) = 1$. Thus by Taylor's theorem,

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^c$$

for some point c between 0 and x. In particular,

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots \frac{x^n}{n!} \quad \text{and} \quad R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^c .$$

We can actually say a little more about this example if we recall that x is *fixed.* We have

$$\mathrm{e}^x = P_n(x) + R_n(x) = P_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^c$$

We show that $R_n(x) \to 0$ as $n \to \infty$, so that (again for fixed x), the sequence $P_n(x) \to e^x$ as $n \to \infty$. If $x < 0$, $\mathrm{e}^c < 1$, while if $x \geq 1$, then since $c < x$, we have $\mathrm{e}^c < \mathrm{e}^x$. thus

$$|R_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^c \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \max(\mathrm{e}^x, 1) \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

We think of the limit of the polynomial as forming a series, the **Taylor series** for e^x. We study series (and then Taylor series) in Section 7.

5.31. Example. Find the Taylor polynomial of order 1 about a for $f(x) = \mathrm{e}^x$, and write down the corresponding remainder term.

Solution. Using the derivatives computed above, by Taylor's theorem,

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^a + (x-a)\,\mathrm{e}^a + \frac{(x-a)^2}{2!}\,\mathrm{e}^c$$

for some point c between a and x. In particular,

$$P_1(x) = \mathrm{e}^a + (x-a)\,\mathrm{e}^a \quad \text{and} \quad R_1(x) = \frac{(x-a)^2}{2!}\,\mathrm{e}^c .$$

5.32. Example. Find the Maclaurin polynomial of order $n > 3$ about 0 for $f(x) = (1+x)^3$, and write down the corresponding remainder term.

Solution. We have

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^3 \\ f'(x) &= 3(1+x)^2 \\ f''(x) &= 6(1+x) \\ f'''(x) &= 6 \\ f^{(n)}(x) &= 0 \quad \text{if } n > 3. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(x) &= 3 \\ f''(x) &= 6 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

and so, by Taylor's theorem

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + \frac{6}{2!}x^2 + \frac{6}{3!}x^3,$$

a result we could have got directly, but which is at least reassuring.

5.33. Example. Find the Taylor polynomial of order n about 0 for $f(x) = \sin x$, and write down the corresponding remainder term.

Solution. There is no difficulty here in calculating derivatives — we have

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \sin x & \\
f'(x) = \cos x & f(0) = 0 \\
f''(x) = -\sin x & f'(x) = 1 \\
f'''(x) = -\cos x & f''(x) = 0 \\
f^{(4)}(x) = \sin x \quad \text{and so on.} & f'''(x) = -1.
\end{array}$$

Thus by Taylor's theorem,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Writing down the remainder term isn't particularly useful, but the important point is that

$$|R_{2n+1}(x)| \le \left|\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\right| \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

5.34. Exercise. Recall that $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, and that $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Now check the shape of the following Taylor polynomials:

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots
\end{aligned}$$

5.35. Example. Find the maximum error in the approximation

$$\sin(x) \sim x - \frac{x^3}{3!}$$

given that $|x| < 1/2$.

Solution. We use the Taylor polynomial for $\sin x$ of order 4 about 0, together with the corresponding remainder. Thus

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\cos c$$

for some c with $0 < c < 1/2$ or $-1/2 < c < 0$. In any case, since $|x| < 1/2$,

$$\left|\frac{x^5}{5!}\cos c\right| \leq \left|\frac{x^5}{5!}\right| \leq \left|\frac{1}{2^5.5!}\right| \leq \frac{1}{120.32}.$$

Warning: The Taylor polynomial always exists, providing f is suitably differentiable. But it need not be useful. Consider the example

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{if } x > 0; \\ 0 & \text{if } x \leq 0. \end{cases}$$

The interest in f is at 0; it is well behaved everywhere else. It turns out that

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = \ldots = 0.$$

So the Taylor polynomial of degree n for f about 0 is $P_n(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0.x^n = 0$, and so for every n, $R_n(x) = f(x)$. Clearly in this case, P_n tells us nothing useful about the function.

5.36. Example. Find the Taylor polynomial of order n about 0 for $f(x) = (1+x)^\alpha$, and note that this gives a derivation of the binomial theorem. In fact, the remainder $|R_n(x)| \to 0$ as $n \to \infty$, provided $|x| < 1$.

Solution. There is again no difficulty here in calculating derivatives — we have

$$\begin{array}{ll} f(x) = (1+x)^\alpha & f(0) = 1 \\ f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} & f'(x) = \alpha \\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} & f''(x) = \alpha(\alpha-1) \\ f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} & f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \\ \quad \text{and in general} & \\ f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} & f^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1). \end{array}$$

Thus by Taylor's theorem,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \\ \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots .$$

The remainder is not hard to deal with, but we omit the proof; in fact $|R_n(x)| \to 0$ when $n \to \infty$.

Note also that if $\alpha > 0$ is an *integer*, say $\alpha = n$ then $|R_n(x)| = 0$ and $f(x) = P_n(x)$. This is another way to get the Binomial theorem described in Section 1.8.

bij Ian Craw: Intro Calculus and Analysis Chapter G3

Monotone convergence

(G3.1) Stirling Formula: *Een veel gebruikte, maar wat slordige vorm van de Stirling Formula is:*

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\cdot(\frac{n}{e})^n$$

waarbij opgemerkt wordt dat de relatieve fout limiet 0 *heeft.*

3.13 De keuze en uitwerking van het probleem van 3.13 is niet ideaal. Hier is een verbeterde versie:
De rij a is weer gedefinieerd met

$$a_{n+1} = \frac{6(1+a_n)}{7+a_n}$$

oftewel

$$a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{waar} \quad f: \quad x \mapsto \frac{6(1+x)}{7+x}$$

maar nu nemen we als startwaarde 3:

$$a_1 = 3$$

Daarmee krijgen we als begin

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 2.4, \quad a_3 \approx 2.17, \dots$$

Het lijkt een dalende rij te zijn, en we hopen te kunnen bewijzen dat het een begrensde dalende rij is. Dat doen we als volgt:

a. We onderzoeken eerst stijgen of dalen van f. Let daarbij er op dat het domein van f uit 2 stukken bestaat: $< -\infty, -7 >$ en $< -7, \infty >$. Het rechterstuk is voor ons van belang.

$$f'(x) = \frac{36}{(7+x)^2}$$

Omdat de afgeleide overal positief is, is f stijgend op $< -7, \infty >$. Dat betekent per definitie:

$$\text{als} \quad -7 < p < q \quad \text{dan} \quad f(p) < f(q)$$

Hiermee gaan we bewijzen dat de rij a dalend is. Dat doen we met volledige inductie:

1. Start: inderdaad: $a_2 < a_1$ volgens de berekening.
2. Inductiestap: veronderstel dat

$$a_n < a_{n-1}$$

Omdat f stijgend is, is dan

$$f(a_n) < f(a_{n-1})$$

dus

$$a_{n+1} < a_n$$

Dus nu voor alle natuurlijke k met $k > 1$:

$$a_k < a_{k-1}$$

dus de rij is dalend.

b. Nu zoeken we naar fixed points oftewel vaste punten oftewel invariante punten van f:

$$?x \in R : f(x) = x$$

$$\frac{6(1+x)}{7+x} = x$$

Even rekenen levert:

$$x = 2 \quad \text{of} \quad x = -3$$

Nu geldt: $a_1 > 2$ en $a_2 > 2$ en $a_3 > 2$. We vermoeden dat $a_k > 2$ voor alle k en dat gaan we weer met volledige inductie bewijzen.

1. Start: inderdaad $a_1 > 2$.
2. Inductiestap: veronderstel dat

   $$a_n > 2$$

   Omdat f stijgend is, is

   $$f(a_n) > f(2)$$

   maar omdat $f(a_n) = a_{n+1}$ en $f(2) = 2$ krijgen we

   $$f(a_{n+1} > 2$$

Conclusie: de rij $n \mapsto a_n$ is begrensd tussen 2 en 3.

De rij a is dus een begrensde dalende rij en heeft een limiet.
We kunnen nu de limiet ook nog gemakkelijk uitrekenen: omdat f een continue functie is op $< -7, \infty >$ en de rij a samen met zijn limiet geheel binnen dat gebied ligt, geldt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)$$

Dus als $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ dan

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$$

Anderzijds

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$$

Dus

$$f(L) = L$$

Blijkbaar is $\lim_{n\to\infty} a_n$ een vast punt van f, dus het is 2 of -3. Maar $a_n > 2$ voor iedere n, dus $\lim_{n\to\infty} a_n \geq 2$, dus blijft er maar één mogelijkheid over: $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

Opmerking 1: Bovenstaande werkt zo mooi dankzij het feit dat f stijgend is in de buurt van het limietpunt. Als f dalend was geweest had je een rij kunnen krijgen die voortdurend om een eventueel limietpunt heen springt. In zo'n geval is een goede aanpak apart te kijken naar twee deelrijen: met even index en met oneven index. Omdat $f \circ f$ in een omgeving van die limiet stijgt, kun je op elk van die deelrijen dan weer bovenstaande methode toepassen.
Opmerking 2: In bovenstaand voorbeeld is de rij meteen vanaf het begin dalend. Het is in de praktijk best mogelijk dat een rij in het begin rare bokkensprongen maakt, maar op den duur ('eventually') dalend of stijgend wordt.
Opmerking 3: Rijen die ontstaan door telkens een functie toe te passen ('iteratie van een functie') spelen een belangrijke rol in de wiskunde en toepassing van wiskunde. De gevolgde aanpak in bovenstaande past mooi in het kader van de voorgaande theorie over monotone begrensde rijen. Er zijn ook andere manieren van aanpak, bijvoorbeeld wanneer je een limiet L vermoedt en dan kijkt naar de rij $n \mapsto |a_n - L|$ in de hoop dat je zult kunnen zien dat die limiet 0 heeft. Ook dan werk je vaak met volledige inductie op basis van $a_{n+1} = f(a_n)$ en $f(L) = L$, maar zo iets zullen we hier niet doen.

Chapter 3

Monotone Convergence

3.1 Three Hard Examples

So far we have thought of convergence in terms of knowing the limit. It is very helpful to be able to deduce convergence even when the limit is itself difficult to find, or when we can only *find* the limit provided it exist. There are better techniques than we have seen so far, dealing with more difficult examples. Consider the following examples:

Sequence definition of e**:** Let $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$; then $a_n \to e$ as $n \to \infty$.

Stirling's Formula: Let $a_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}(n/e)^n}$; then $a_n \to \sqrt{2\pi}$ as $n \to \infty$.

Fibonacci Sequence: Define $p_1 = p_2 = 1$, and for $n \geq 1$, let $p_{n+2} = p_{n+1} + p_n$.
Let $a_n = \dfrac{p_{n+1}}{p_n}$; then $a_n \to \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ as $n \to \infty$.

We already saw in 2.12 that knowing a sequence **has** a limit can help to **find** the limit. As another example of this, consider the third sequence above. We have

$$\frac{p_{n+2}}{p_{n+1}} = 1 + \frac{p_n}{p_{n+1}} \quad \text{and so} \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}. \tag{3.1}$$

Assume now that $a_n \to l$ as $n \to \infty$; then as before in 2.12, we know that $a_{n+1} \to l$ as $n \to \infty$ (check this formally)! Using 2.10 and equation 3.1, we have $l = 1 + 1/l$, or $l^2 - l - 1 = 0$. Solving the quadratic gives

$$a_n = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

and so these are the only possible limits. Going back to equation 3.1, we see that since $a_1 = 1$, we have $a_n > 1$ when $n > 1$. Thus by 2.16, $l \geq 1$; we can eliminate the negative root, and see that the limit, **if** it exists, is unique. In fact, all of the limits described above are within reach with some more technique, although Stirling's Formula takes quite a lot of calculation.

3.2 Boundedness Again

Of course not all sequences have limits. But there is a useful special case, which will take care of the three sequences described above and many more. To describe the result we need more definitions, which describe extra properties of sequences.

3.1. Definition. A sequence $\{a_n\}$ is **bounded above** if there is some K such that $a_n \leq K$ for all n. We say that K is an **upper bound** for the sequence.

- There is a similar definition of a sequence being **bounded below**.
- The number K may not be the *best* or smallest upper bound. All we know from the definition is that it will be an upper bound.

3.2. Example. The sequence $a_n = 2 + (-1)^n$ is bounded above.

Solution. Probably the best way to show a sequence is bounded above is to write down an upper bound – i.e. a suitable value for K. In this case, we claim $K = 4$ will do. To check this we must show that $a_n \leq 4$ for all n. But if n is even, then $a_n = 2 + 1 = 3 \leq 4$, while if n is odd, $a_n = 2 - 1 = 1 \leq 4$. So for any n, we have $a_n \leq 4$ and 4 is an upper bound for the sequence $\{a_n\}$. Of course 3 is also an upper bound for this sequence.

3.3. Exercise. Let $a_n = \dfrac{1}{n} + \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Show that $\{a_n\}$ is bounded above and is bounded below. [Recall that $|\cos x| \leq 1$ for *all* x.]

3.4. Exercise. Show that a sequence which is bounded above and bounded below is a bounded sequence (as defined in 2.24).

3.2.1 Monotone Convergence

3.5. Definition. A sequence $\{a_n\}$ is an **increasing** sequence if $a_{n+1} \geq a_n$ for every n.

- If we need precision, we can distinguish between a strictly increasing sequence, and a (not necessarily strictly) increasing sequence. This is sometime called a *non-decreasing* sequence.
- There is a similar definition of a *decreasing* sequence.
- What does it mean to say that a sequence is eventually increasing?
- A sequence which is either always increasing or always decreasing is called a *monotone* sequence. Note that an "arbitrary" sequence is not monotone (it will usually sometimes increase, and sometimes decrease).

Nevertheless, monotone sequences *do* happen in real life. For example, the sequence

$$a_1 = 3 \qquad a_2 = 3.1 \qquad a_3 = 3.14 \qquad a_4 = 3.141 \qquad a_5 = 3.1415\ldots$$

is how we often describe the decimal expansion of π. Monotone sequences are important because we can say something useful about them which is not true of more general sequences.

3.6. Example. Show that the sequence $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$ is increasing.

Solution. One way to check that a sequence is increasing is to show $a_{n+1} - a_n \geq 0$, a second way is to compute a_{n+1}/a_n, and we will see more ways later. Here,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n+1}{2(n+1)+1} - \frac{n}{2n+1} \\ &= \frac{(2n^2+3n+1) - (2n^2+3n)}{(2n+3)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} > 0 \quad \text{for all } n \end{aligned}$$

and the sequence *is* increasing.

3.7. Exercise. Show that the sequence $a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}$ is decreasing when $n > 1$.

If a sequence is increasing, it is an interesting question whether or not it is bounded above. If an upper bound does exist, then it seems as though the sequence can't help converging — there is nowhere else for it to go.

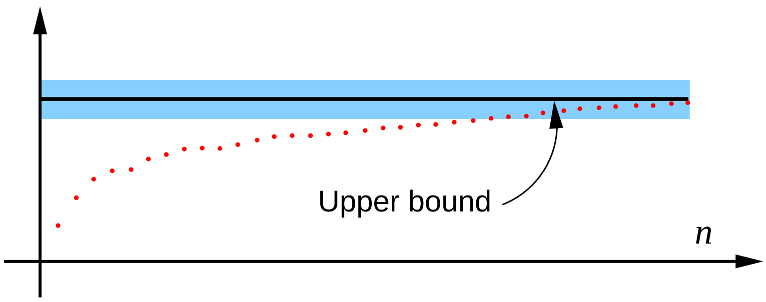


Figure 3.1: A monotone (increasing) sequence which is bounded above seems to converge because it has nowhere else to go!

In contrast, if there is no upper bound, the situation is clear.

3.8. Example. An increasing sequence which is *not* bounded above tends to ∞ (see definition 2.30).

Solution. Let the sequence be $\{a_n\}$, and assume it is not bounded above. Pick K; we show eventually $a_n > K$. Since K is not an upper bound for the sequence, there is some witness to this. In other words, there is some a_N with $a_N > K$. But in that case, since the sequence is increasing monotonely, we have $a_n \geq a_N \geq K$ for all $n \geq N$. Hence $a_n \to \infty$ as $n \to \infty$.

3.9. Theorem (The monotone convergence principle). *Let $\{a_n\}$ be an increasing sequence which is bounded above; then $\{a_n\}$ is a convergent sequence. Let $\{a_n\}$ be a decreasing sequence which is bounded below; then $\{a_n\}$ is a convergent sequence*

Proof. To prove this we need to appeal to the completeness of $\mathbb{R}$, as described in Section 1.2. Details will be given in third year, or you can look in (Spivak 1967) for an accurate deduction from the appropriate axioms for $\mathbb{R}$. $\square$

This is a very important result. It is the first time we have seen a way of deducing the convergence of a sequence without first knowing what the limit is. And we saw in 2.12 that just knowing a limit exists is sometimes enough to be able to find its value. Note that the theorem only deduces an "eventually" property of the sequence; we can change a finite number of terms in a sequence without changing the value of the limit. This means that the result must still be true of we only know the sequence is eventually increasing and bounded above. What happens if we relax the requirement that the sequence is bounded above, to be just *eventually* bounded above? (Compare Proposition 2.27).

3.10. Example. Let a be fixed. Then $a^n \to 0$ as $n \to \infty$ if $|a| < 1$, while if $a > 1$, $a^n \to \infty$ as $n \to \infty$.

Solution. Write $a_n = a^n$; then $a_{n+1} = a.a_n$. If $a > 1$ then $a_{n+1} < a_n$, while if $0 < a < 1$ then $a_{n+1} < a_n$; in either case the sequence is monotone.

Case 1 $0 < a < 1$; the sequence $\{a_n\}$ is bounded below by 0, so by the monotone convergence theorem, $a_n \to l$ as $n \to \infty$. As before note that $a_{n+1} \to l$ as $n \to \infty$. Then applying 2.10 to the equation $a_{n+1} = a.a_n$, we have $l = a.l$, and since $a \neq 1$, we must have $l = 0$.

Case 2 $a > 1$; the sequence $\{a_n\}$ is increasing. Suppose it is bounded above; then as in Case 1, it converges to a limit l satisfying $l = a.l$. This contradiction shows the sequence is *not* bounded above. Since the sequence is monotone, it must tend to infinity (as described in 3.9).

Case 3 $|a| < 1$; then since $-|a^n| \leq a^n \leq |a^n|$, and since $|a^n| = |a|^n \to 0$ as $n \to \infty$, by squeezing, since each outer limit $\to 0$ by case 1, we have $a^n \to 0$ as $n \to \infty$ whenever $|a| < 1$.

3.11. Example. Evaluate $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ and $\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{-2}{3}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$.

Solution. Using the result that if $|a| < 1$, then $a^n \to 0$ as $n \to \infty$, we deduce that $(-2/3)^n \to 0$ as $n \to \infty$, that $(4/5)^n \to 0$ as $n \to \infty$, and using 2.10, that the second limit is also 0.

3.12. Exercise. Given that $k > 1$ is a fixed constant, evaluate $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n$. How does your result compare with the sequence definition of e given in Sect 3.1.

3.13. Example. Let $a_1 = 1$, and for $n \geq 1$ define $a_{n+1} = \dfrac{6(1 + a_n)}{7 + a_n}$. Show that $\{a_n\}$ is convergent, and find its limit.

Solution. We can calculate the first few terms of the sequence as follows:

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1.5 \qquad a_3 = 1.76 \qquad a_4 = 1.89\ldots$$

and it *looks* as though the sequence might be increasing. Let

$$f(x) = \frac{6(1 + x)}{7 + x}, \quad \text{so} \quad f(a_n) = a_{n+1}. \tag{3.2}$$

By investigating f, we hope to deduce useful information about the sequence $\{a_n\}$. We have

$$f'(x) = \frac{(7+x).6 - 6(1+x)}{(7+x)^2} = \frac{36}{((7+x)^2} > 0.$$

Recall from elementary calculus that if $f'(x) > 0$, then f is increasing; in other words, if $b > a$ then $f(b) > f(a)$. We thus see that f is increasing.

Since $a_2 > a_1$, we have $f(a_2) > f(a_1)$; in other words, $a_3 > a_2$. Applying this argument inductively, we see that $a_{n+1} > a_n$ for all n, and the sequence $\{a_n\}$ is increasing.

If x is large, $f(x) \approx 6$, so perhaps $f(x) < 6$ for all x.

$$6 - f(x) = \frac{6(7+x) - 6 - 6x}{7+x} = \frac{36}{7+x} > 0 \quad \text{if} \quad x > -7$$

In particular, we see that $f(x) \leq 6$ whenever $x \geq 0$. Clearly $a_n \geq 0$ for all n, so $f(a_n) = a_{n+1} \leq 6$ for all n, and the sequence $\{a_n\}$ is increasing and bounded above. Hence $\{a_n\}$ is convergent, with limit l (say).

Since also $a_{n+1} \to l$ as $n \to \infty$, applying 2.10 to the defining equation gives $l = \dfrac{6(1+l)}{7+l}$, or $l^2 + 7l = 6 + 6l$. Thus $l^2 + l - 6 = 0$ or $(l+3)(l-2) = 0$. Thus we can only have limits 2 or -3, and since $a_n \geq 0$ for all n, necessarily $l > 0$. Hence $l = 2$.

Warning: There is a difference between showing that f is increasing, and showing that the sequence is increasing. There is of course a relationship between the function f and the sequence a_n; it is precisely that $f(a_n) = a_{n+1}$. What we know is that *if* f is increasing, then the sequence carries on going the way it starts; if it starts by increasing, as in the above example, then it continues to increase. In the same way, if it starts by decreasing, the sequence will continue to decrease. Show this for yourself.

3.14. Exercise. Define the sequence $\{a_n\}$ by $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (4a_n + 2)/(a_n + 3)$ for $n \geq 1$. Show that $\{a_n\}$ is convergent, and find it's limit.

3.15. Proposition. *Let $\{a_n\}$ be an increasing sequence which is convergent to l (In other words it is necessarily bounded above). Then l is an upper bound for the sequence $\{a_n\}$.*

Proof. We argue by contradiction. If l is not an upper bound for the sequence, there is some a_N which witnesses this; i.e. $a_N > l$. Since the sequence is increasing, if $n \geq N$, we have $a_n \geq a_N > l$. Now apply 2.16 to deduce that $l \geq a_N > l$ which is a contradiction. □

3.16. Example. Let $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$; then $\{a_n\}$ is convergent.

Solution. We show we have an increasing sequence which is bounded above. By the binomial theorem,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}.\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}.\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.2.2} + \cdots \leq 3.\end{aligned}$$

Thus $\{a_n\}$ is bounded above. We show it is increasing in the same way.

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\frac{n}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}.\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}.\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}\\ &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots\end{aligned}$$

from which it clear that a_n increases with n. Thus we have an increasing sequence which is bounded above, and so is convergent by the Monotone Convergence Theorem 3.9. Another method, in which we show the limit is actually e is given on tutorial sheet 3.

3.2.2 The Fibonacci Sequence

3.17. Example. Recall the definition of the sequence which is the ratio of adjacent terms of the Fibonacci sequence as follows:- Define $p_1 = p_2 = 1$, and for $n \geq 1$, let $p_{n+2} = p_{n+1} + p_n$. Let $a_n = \dfrac{p_{n+1}}{p_n}$; then $a_n \to \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ as $n \to \infty$. Note that we only have to show that this sequence is convergent; in which case we already know it converges to $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Solution. We compute the first few terms.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	Formula
p_n	1	1	2	3	5	8	13	21	$p_{n+2} = p_n + p_{n+1}$
a_n	1	2	1.5	1.67	1.6	1.625	1.61	1.62	$a_n = p_{n+1}/p_n$

On the basis of this evidence, we make the following *guesses*, and then try to prove them:

- For all n, we have $1 \leq a_n \leq 2$;
- a_{2n+1} is increasing and a_{2n} is decreasing; and
- a_n is convergent.

Note we are really behaving like proper mathematicians here; the aim is simply to use proof to see if earlier guesses were correct. The method we use could be very like that in the previous example; in fact we choose to use induction more.

> Either method can be used on either example, and you should become familiar with both techniques.

Recall that, by definition,

$$a_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{p_n} = \quad = 1 + \frac{1}{a_n}. \tag{3.3}$$

Since $p_{n+1} \geq p_n$ for all n, we have $a_n \geq 1$. Also, using our guess,

$$2 - a_{n+1} = 2 - \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = 1 - \frac{1}{a_n} \geq 0, \quad \text{and} \quad a_n \leq 2.$$

The next stage is to look at the "every other one" subsequences. First we get a relationship like equation 3.3 for these. (We hope these subsequences are going to be better behaved than the sequence itself).

$$a_{n+2} = 1 + \frac{1}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}} = 1 + \frac{a_n}{1 + a_n}. \tag{3.4}$$

We use this to compute how the difference between successive terms in the sequence behave. Remember we are interested in the "every other one" subsequence. Computing,

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_n &= \frac{a_n}{1 + a_n} - \frac{a_{n-2}}{1 + a_{n-2}} \\ &= \frac{a_n + a_n a_{n-2} - a_{n-2} - a_n a_{n-2}}{(1 + a_n)(1 + a_{n-2})} \\ &= \frac{a_n - a_{n-2}}{(1 + a_n)(1 + a_{n-2})} \end{aligned}$$

In the above, we already know that the denominator is positive (and in fact is at least 4 and at most 9). This means that $a_{n+2} - a_n$ has the same sign as $a_n - a_{n-2}$; we can now use this information on each subsequence. Since $a_4 < a_2 = 2$, we have $a_6 < a_4$ and so on; by induction, a_{2n} forms a decreasing sequence, bounded below by 1, and hence is convergent to some limit α. Similarly, since $a_3 > a_1 = 1$, we have $a_5 > a_3$ and so on; by induction a_{2n} forms an increasing sequence, bounded above by 2, and hence is convergent to some limit β.

Remember that adjacent terms of both of these sequences satisfied equation 3.4, so as usual, the limit satisfies this equation as well. Thus

$$\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1 + \alpha}, \qquad \alpha + \alpha^2 = 1 + 2\alpha, \qquad \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \quad \text{and} \quad \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2}$$

Since all the terms are positive, we can ignore the negative root, and get $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$. In exactly the same way, we have $\beta = (1 + \sqrt{5})/2$, and both subsequences converge to the same limit. It is now an easy deduction (which is left for those who are interested - ask if you want to see the details) that the Fibonacci sequence itself converges to this limit.

Antwoorden en uitwerkingen van opgaven uit chapter 3

3.3 $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ and $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, so $-1 \leq a_n \leq 2$.

3.4 Let B be a bound below and U an upper bound for the sequence $n \mapsto a_n$. Then $\forall n : B \leq a_n \leq U$.
Define $M := max\{|B|, |U|\}$. Then

$$a_n \leq U \leq |U| \leq M$$

$$-a_n \leq -B \leq |B| \leq M \quad \text{so} \quad a_n \geq -M$$

So

$$-M \leq a_n \leq M$$

3.7

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = \frac{n^2(n+1) - n^2 - n(n+1)^2 + (n+1)^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{-n^2+n+1}{n^2(n+1)^2}$$

If $n > 1$ then $n \geq 2$, so $n^2 > 2n = n+n > n+1$, so $-n^2+n+1 < 0$, so the numerator is negative, the denominator positive, the quotient negative, so

$$a_{n+1} < a_n$$

3.12 As $0 < 1 - \frac{1}{k} < 1$ this is an example of Case 1 in the above.

3.14 By calculating some elements of the sequence one could conjecture that this sequence is increasing. In order to prove this using mathematical induction we introduce

$$f : x \mapsto \frac{4x+2}{x+3}$$

With f we get $a_{n+1} = f(a_n)$. We investigate f:

$$f'(x) = \frac{10}{(x+3)^2}$$

so $f'(x) \geq 0$ for all x. So f is an increasing function on each part of its domain, so it is increasing on $< -\infty, -3 >$ and on $< -3, \infty >$. As $a_1 = 1$ it follows easily with mathematical induction that $a_n > 0 > -3$, so all elements of the sequence are in the right part of the domain of f. This yields: if $a_n > a_{n-1}$ then $f(a_n) > f(a_{n-1})$, so $a_{n+1} > a_n$. But $a_2 = \frac{3}{2} > 1 = a_1$, so with mathematical induction we get

$$\forall n : \quad a_{n+1} > a_n$$

Conclusion: the sequence is increasing.
Now let's find the fixed points of f:

$$?x \in R : \quad \frac{4x+2}{x+3} = x$$

After multiplying each side with $x+3$ we find $x = -1$ or $x = 2$. Now $-1 < a_1 < 2$ and f is an increasing function, so $f(-1) < f(a_1) < f(2)$, so $-1 < a_2 < 2$. So we can go on (induction!). Conclusion: the sequence is bounded.
Conclusion: $n \mapsto a_n$ is an increasing sequence, bounded above, so it is convergent.
Let the limit be L. Take the limit of the left and the right side of the recursion equation:

$$L = \frac{4L+2}{L+3}$$

Solving this equation to L yields $L = -1$ or $L = 2$. As $a_n >\geq a_1 = 1$, $L \geq 1$, so $L \neq -1$, so $L = 2$.

extra opgaven:

opgave G3.1 — *oefening*

Neem de rij met $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 1}{1 - 3a_n}$ en $a_1 = 1$. Is deze rij convergent? Zo ja, bewijs dat, zo nee, waarom niet?

opgave G3.2 — *oefening*

We gaan kijken naar rijen met $a_{n+1} = \frac{12-3a_n}{1+a_n}$. Let daarbij goed op de aanwijzingen die in deze tekst zijn gegeven na het alternatief voor voorbeeld 3.13!

a. Neem $a_1 = 1$. Krijg je zo een convergente rij? Bewijs je antwoord.

b. Neem $a_1 = -5$. Krijg je zo een convergente rij? Bewijs je antwoord.

opgave G3.3 —

Bekijk de rij $\frac{\ln(1)}{\sqrt{1}}, \frac{\ln(2)}{\sqrt{2}}, \frac{\ln(3)}{\sqrt{3}}, \ldots \frac{\ln(k)}{\sqrt{k}}, \ldots$.

a. Kun je betrekkelijk gemakkelijk zien dat deze rij een limiet heeft? Hoe?

b. Bereken de limiet van deze rij (en bewijs dat dat inderdaad de limiet is!) zonder gebruik te maken van paragraaf 7.5.2.
(Tip: gebruik het squeezing Lemma met een rij van type $k \mapsto \frac{1}{k^a}$ waarbij je a geschikt moet kiezen.

opgave G3.4 — *inleveren*

a. Laat zien dat er precies één getal $c \in R$ is zodat

$$\cos(c) = c$$

b. Dat getal c uit het vorige onderdeel kun je gemakkelijk berekenen (benaderen) met een eenvoudige rekenmachine waarop de functie cos beschikbaar is: Begin met een getal, bijvoorbeeld 0, bereken daarvan de cosinus, bereken van het resultaat de cosinus, enz. Op den duur kom je uit bij c. Probeer maar.
We gaan dat nu bewijzen: we maken de rij a met $a_0 = 0$ en $a_{n+1} = \cos(a_n$ voor iedere natuurlijke n. Bewijs dat die rij een limiet heeft en wel dat die limiet gelijk is aan c.
Aanwijzing: kijk nog eens naar de uitwerking van het alternatief van voorbeeld 3.13 (dus in dit boek!) en opmerking 1 daarbij: je moet hier de rij gaan splitsen in de deelrij met even indices en de deelrij met oneven indices! Je kijkt an dus apart naar de deelrijen

$$0, \quad \cos(\cos(0)), \quad \cos(\cos(\cos(\cos(0)))), \quad \cos(\cos(\cos(\cos(\cos(\cos(0)))))), \ldots$$

en

$$\cos(0), \quad \cos(\cos(\cos(0))), \quad \cos(\cos(\cos(\cos(\cos(0))))), \quad \ldots$$

bij Ian Craw: Intro Calculus and Analysis Chapter G6

Infinite Series

(G6.1) notatie: *Een reeks of infinite series is een rij die ontstaat uit een andere rij, zeg a, door hiervan de partiële sommen te nemen. Bijvoorbeeld uit de* **rij** *(***sequence***) K van de omgekeerden van kwadraten van natuurlijke getallen groter dan 0*

$$K: \quad n \mapsto \frac{1}{n^2}$$

kun je de **reeks** *(***series***) S maken:*

$$S: \quad n \mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$$

oftewel

$$S: \quad n \mapsto \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots \frac{1}{n^2}$$

We zullen die reeks ook wel noteren als $\sum_{i=1} \frac{1}{i^2}$ of eventueel wat slordig als $\sum \frac{1}{i^2}$.

Aanvullende stelling voor het bewijzen van convergentie van reeksen (na 6.21):

(G6.2) stelling: *Laat $n \mapsto a_n$ een rij zijn met uitsluitend positieve termen.*

a. Als

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$$

(Let op: alleen de voorwaarde dat $\sqrt[n]{a_n} < 1$ is te zwak!!!)

dan bestaat $\sum^{\infty} a_n$.

b. Als

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$$

(Let op: alleen de voorwaarde dat $\sqrt[n]{a_n} < 1$ is te zwak!!!)

dan bestaat $\sum^{\infty} a_n$ niet.

Antwoorden bij opgaven van chapter 6

6.2

$$\lim_{N\to\infty}(7\cdot\frac{1}{3^n}-4\cdot\frac{1}{2^n}=7\cdot\lim_{N\to\infty}\frac{1}{3^n}-4\cdot\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2^n}$$

Here we use 2.10!

$$=7\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}-4\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{7}{2}-4=-\frac{1}{2}$$

6.18

$$\frac{\frac{2^n+7}{3^n-1}}{\frac{2^n}{3^n}}=\frac{2^n+7}{3^n-1}\cdot\frac{3^n}{2^n}=\frac{2^n+7}{2^n}\cdot\frac{3^n}{3^n-1}=$$

$$=\frac{1+\frac{7}{2^n}}{1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^n}}$$

Limiet $n\to\infty$ nemen levert $1\cdot 1=1$.
Verder is $\sum(\frac{2}{3})^n$ convergent, want $-1<\frac{2}{3}<1$. Dus $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+7}{3^n-1}$ bestaat.

6.20

$$\frac{\frac{n}{\sqrt{n^5+n+1}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\frac{n}{\sqrt{n^5+n+1}}\cdot\frac{n^{\frac{3}{2}}}{1}=\frac{\sqrt{n^5}}{\sqrt{n^5+n+1}}=\sqrt{\frac{n^5}{n^5+n+1}}=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^5}}}$$

Limiet nemen levert 1.
Verder bestaat $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ volgens 6.19, want $\frac{3}{2}>1$.
Dus $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^5+n+1}}$ bestaat.

6.26

$$\sum_{n=1}^{N}|\frac{\sin(n)}{n^2}|\le\sum_{n=1}^{N}|\frac{1}{n^2}|\le\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{1}{n^2}|$$

Verder zijn de termen absolute waardes van iets, dus ≥ 0. Dus de rij

$$N\to\sum_{n=1}^{N}|\frac{\sin(n)}{n^2}|$$

is een stijgende en begrensde rij, dus convergent.
Daarmee is $\sum_{n=1}\frac{\sin(n)}{n^2}$ een absoluut convergente reeks en dus is deze zelf ook convergent.

Opgaven

opgave G6.1 — *test je vakkennis en je theorieoverzicht*

a. Wat zijn de formules voor sommen van rekenkundige rijen en van meetkundige rijen?

b. Voor welke a bestaat $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^a}$?

c. Welke methoden heb je om convergentie/divergentie te bewijzen voor reeksen? (ter controle: zie 6.11, 6.8, 6.29 (vergelijk met 6.8!), 6.12 en 6.14, 6.16, 6.7 en 6.10 en 6.19, 6.21 in Craw en stelling (G6.2) op bldz. 552 in de aanvulling.

opgave G6.2 — *pittige oefening*
Welke van de volgende reeksen zijn convergent?

a. $\sum_k \frac{4^k}{k^4}$

b. $\sum_k \left(\sum i = 1^k 2^{-i-1}\right)^k$

c. $\sum_k \frac{1}{\sqrt{k^3 - k}}$ (Tip: maak schatting van de termen voor grote k!)

d. $\sum_{k=2}(1 - \frac{1}{k})^k$ (Pittig! Tip: reken de eerste termen concreet uit, formuleer een vermoeden en bewijs dat. Bedenk ook wat voor technieken je ter beschikking hebt om zo iets te bewijzen!)

Chapter 6

Infinite Series

In this section we return to study a particular kind of sequence, those built by adding up more and more from a given collection of terms. One motivation comes from section 5.6, in which we obtained a sequence of approximating polynomials $\{P_n\}$ to a given function. It is more natural to think of adding additional terms to the polynomial, and as such we are studying **series**. However, there is a closely related sequence; the sequence of partial sums.

6.1 Arithmetic and Geometric Series

Consider the sum

$$a + (a + r) + (a + 2r) + \cdots + (a + nr)$$

We are trying to add up the terms in an **arithmetic progression**. A small amount of notation makes the addition easy.

$$\begin{aligned} \text{Let } S_n &= a + (a + r) + (a + 2r) + \cdots + (a + nr), \\ S_n &= (a + nr) + (a + (n - 1)r) + \cdots + (a + r) + a, \\ \text{so } 2S_n &= (2a + nr) + (2a + nr) + \cdots + (2a + nr), \text{ and} \\ S_n &= (n + 1).\frac{(a + (a + nr))}{2}. \end{aligned}$$

Note that if $r > 0$ then $S_n \to \infty$ as $n \to \infty$, while if $r < 0$ then $S_n \to -\infty$ as $n \to \infty$.

We next consider a **geometric progression (or series)**:

$$\begin{aligned} \text{Let } S_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n, \\ rS_n &= ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n+1}, \\ \text{so } (1 - r)S_n &= a(1 - r^{n+1}), \text{ and} \\ S_n &= \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r} \quad \text{if} \quad r \neq 1. \end{aligned}$$

Note that if $|r| < 1$, then $S_n \to \dfrac{a}{1 - r}$ as $n \to \infty$.

If $r > 1$, say $r = 1 + k$,

$$\begin{aligned} S_n &= a\left(\frac{(1+k)^{n+1}-1}{k}\right), \\ &> \frac{a}{k}\big(1+(n+1)k-1\big) > a(n+1) \to \infty \quad \text{if} \quad a > 0. \end{aligned}$$

6.1. Example. Find $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$.

Solution.

$$\begin{aligned} \sum\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right) &= \sum\frac{1}{2^n}+\sum\frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots \\ &= 1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-1/3}\right) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

6.2. Exercise. Find $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(7\frac{1}{3^n}-4\frac{1}{2^n}\right)$.

6.2 Convergent Series

6.3. Definition. Let $\{a_n\}$ be a sequence, and let

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad \text{the } n^{th} \text{ partial sum.}$$

If $\lim_{n\to\infty} S_n$ exists, we say that $\sum a_n$ is a **convergent series**, and write $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum a_n$.

Thus a series is convergent if and only if it's sequence of partial sums is convergent. The limit of the sequence of partial sums is the **sum of the series**. A series which is *not* convergent, is a **divergent series**.

6.4. Example. The series $\sum r^n$ is convergent with sum $1/(1-r)$, provided that $|r| < 1$. For other values of r, the series is divergent; in particular, the series $\sum(-1)^n$ is divergent.

Solution. We noted above that when $|r| < 1$, $S_n \to a/(1-r)$ as $n \to \infty$; note particular cases;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1 \quad \text{or equivalently,} \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = 1.$$

6.5. Example. The sum $\displaystyle\sum\frac{1}{n(n+1)}$ is convergent with sum 1.

Solution. We can compute the partial sums explicitly:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1} \to 1 \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

6.6. Example. The sum $\sum \frac{1}{n}$ is divergent.

Solution. We estimate the partial sums:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{15}\right)+\cdots+\frac{1}{n} \\ &> 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8} > 2\frac{1}{2} \quad \text{if } n \geq 15 \\ &> 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\frac{8}{16} > 3 \quad \text{if } n \geq 31 \\ &\to \infty \quad \text{as} \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

6.7. Example. The sum $\sum \frac{1}{n^2}$ is convergent. [Actually the sum is $\pi^2/6$, but this is much harder.]

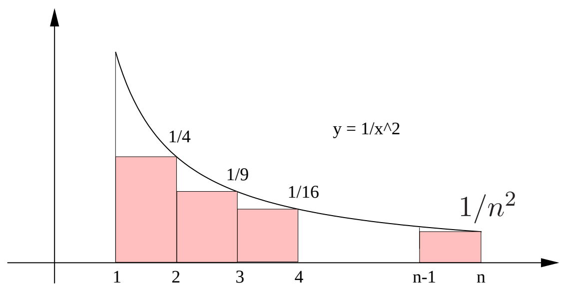


Figure 6.1: Comparing the area under the curve $y = 1/x^2$ with the area of the rectangles below the curve

Solution. We estimate the partial sums. Since $1/n^2 > 0$, clearly $\{S_n\}$ is an increasing sequence. We show it is bounded above, whence by the Monotone Convergence Theorem (3.9), it is convergent. From the diagram,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} &< \int_1^n \frac{d\,x}{x^2}, \quad \text{and so} \\ S_n &< 1+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^n \leq 2-\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Thus $S_n < 2$ for all n, the sequence of partial sums is bounded above, and the series is convergent.

6.8. Proposition. *Let $\sum a_n$ be convergent. Then $a_n \to 0$ as $n \to \infty$.*

Proof. Write $l = \lim_{n\to\infty} S_n$, and recall from our work on limits of sequences that $S_{n-1} \to l$ as $n \to \infty$. Then

$$a_n = (a_1+a_2+\ldots a_n)-(a_1+a_2+\ldots a_{n-1}) = S_n - S_{n-1} \to l-l \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

$\square$

6.9. Remark. This gives a *necessary*condition for the convergence of a series; it is *not* sufficient. For example we have seen that $\sum 1/n$ is divergent, even though $1/n \to 0$ as $n \to \infty$.

6.10. Example. The sum $\sum \frac{1}{n}$ is divergent (Graphical method).

Solution. We estimate the partial sums. Since $1/n > 0$, clearly $\{S_n\}$ is an increasing sequence. We show it is not bounded above, whence by the note after 3.9, the sequence of partial sums $\to \infty$ as $n \to \infty$.

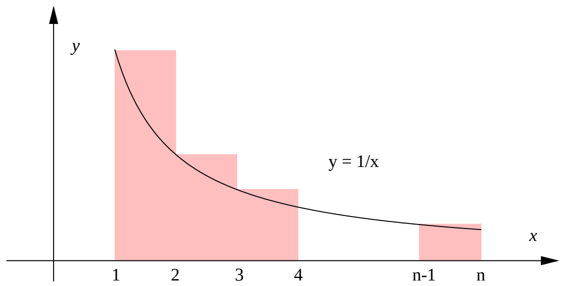


Figure 6.2: Comparing the area under the curve $y = 1/x$ with the area of the rectangles above the curve

From the diagram,

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} > \int_1^n \frac{d\,x}{x} > \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Writing $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, we have $S_n > \log n > S_n - 1$, or equivalently $1 + \log n > S_n > \log n$ for all n. Thus $S_n \to \infty$ and the series is divergent. [There is a much better estimate; the difference $S_n - \log n \to \gamma$ as $n \to \infty$, where γ is Euler's constant.]

6.11. Proposition. *Let $\sum a_n$ and $\sum b_n$ be convergent. Then $\sum(a_n + b_n)$ and $\sum c.a_n$ are convergent.*

Proof. This can be checked easily directly from the definition; it is in effect the same proof that the sum of two convergent sequences is convergent etc. □

6.3 The Comparison Test

We have already used the Monotone Convergence Theorem in studying simple series. In fact it is a lot more useful. When we know the behaviour of some simple series, we can deduce many more results by comparison as follows.

6.12. Theorem. (The Comparison Test) *Assume that $0 \leq a_n \leq b_n$ for all n, and suppose that $\sum b_n$ is convergent. Then $\sum a_n$ is convergent.*

Proof. Define

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \\ T_n &= b_1 + b_2 + \cdots b_n. \end{aligned}$$

Then by hypothesis, $0 \leq S_n \leq T_n$. Since $\{T_n\}$ is a convergent sequence, it is a bounded sequence by Prop 2.28. In particular, it is bounded above, so there is some K such that $T_n \leq K$ for all n. Thus $S_n \leq K$ for all n, so $\{S_n\}$ is a sequence that is bounded above; since $a_n \geq 0$, $S_{n+1} = S_n + a_n \geq S_n$ and $\{S_n\}$ is an increasing sequence. Thus by the Monotone Convergence Theorem, it is a convergent sequence □

.

6.13. Example. Let $a_n = \dfrac{2n}{3n^3 - 1}$ and let $b_n = \dfrac{1}{n^2}$. Then $\sum a_n$ is convergent

Solution. For $n \geq 1$, $n^3 \geq 1$, so $3n^3 - 1 \geq 2n^3$. Thus

$$a_n = \frac{2n}{3n^3 - 1} \leq \frac{2n}{2n^3} = b_n.$$

Since we know that $\sum b_n$ is convergent, so is $\sum a_n$.

6.14. Remark. The conclusions of Theorem 6.12 remain true even if we only have $a_n \leq b_n$ eventually; for if it holds for $n \geq N$, we replace the inequality by

$$S_n \leq T_n + a_1 + a_2 + \cdots + a_N$$

and this then holds for all n.

6.15. Example. Let $a_n = \dfrac{\log n}{n}$, and compare with $b_n = \dfrac{1}{n}$.

Solution. Note that if $n \geq 3$, then $\log n > 1$. We can thus use the "eventually" form of the comparison test; we have

$$a_n = \frac{\log n}{n} > \frac{1}{n} = b_n,$$

We deduce divergence, for if $\sum a_n$ were convergent, it follows that that $\sum b_n$ was convergent, which it isn't!

6.16. Corollary (Limiting form of the Comparison Test). *Suppose that $a_n > 0$ and $b_n > 0$, and that there is some constant k such that $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k > 0$. Then $\sum a_n$ is convergent iff $\sum b_n$ is convergent.*

Proof. Assume first that $\sum b_n$ is convergent. Since $a_n/b_n \to k$ as $n \to \infty$, eventually (take $\epsilon = k > 0$), we have $a_n \leq 2kb_n$, which is convergent by 6.11. Hence $\sum a_n$ is convergent by 6.12. To get the converse, note that $b_n/a_n \to 1/k$ as $n \to \infty$, so we can use the same argument with a_n and b_n interchanged. □

6.17. Example. Let $a_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$ and let $b_n = \dfrac{1}{n}$. Then $\sum a_n$ is divergent by the limiting form of the comparison test.

Solution. Note that the terms are all positive, so we try to apply the limiting form of the comparison test directly.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{n^2+1} . \frac{n}{1} = \frac{n^2}{n^2+1} \to 1 \quad \text{as } n \to \infty.$$

Since the limit is non-zero, the use of the limiting form of the comparison test is valid, and we see that $\sum a_n$ is divergent.

Note also we need our work on sequences in Section 2 to evaluate the required limit.

This is all very well, but as with the "new sequences from old" programme, we need a few reference sequences before we can get further. One set is the geometric series, which we have already met.

6.18. Exercise. Let $a_n = \dfrac{2^n + 7}{3^n - 1}$ and let $b_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Use the limiting form of the comparison test to show that $\sum a_n$ is convergent.

We also know about $\sum 1/n^\alpha$, at least when $\alpha \geq 2$ when it converges, by comparison with $\sum 1/n^2$, and when $\alpha \leq 1$ when it diverges, by comparison with $\sum 1/n$.

6.19. Proposition. *The sum* $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ *is convergent when* $\alpha > 1$.

Solution. Assume $\alpha > 1$; we estimate the partial sums. Since $1/n^\alpha > 0$, clearly $\{S_n\}$ is an increasing sequence. Let $S_n = 1 + \dfrac{1}{2^\alpha} + \cdots + \dfrac{1}{n^\alpha}$, and consider the graph of $y = 1/x^\alpha$, noting that y is a decreasing function of x (which is where we use that fact that $\alpha > 1$). From a diagram which is essentially the same as that of Fig 6.1,

$$\begin{aligned}
\text{shaded area} &< \int_1^n \frac{d\,x}{x^\alpha} \\
\frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} &< \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^n \\
S_n - 1 &< \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \\
S_n &< \frac{1}{\alpha - 1} + 1
\end{aligned}$$

Thus the sequence of partial sums is bounded above, and the series converges.

6.20. Exercise. Let $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^5 + n + 1}}$ and let $b_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Use the limiting form of the comparison test to show that $\sum a_n$ is convergent.

We can consider the method of comparing with integrals as an "integral test" for the convergence of a series; rather than state it formally, note the method we have used.

6.21. Theorem (The Ratio Test). *Let* $\sum a_n$ *be a series, and assume that* $\lim \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to r$ *as* $n \to \infty$. *Then if* $r < 1$, *the series is convergent, if* $r > 1$, *the series is divergent, while if* $r = 1$, *the test gives no information.*

Proof. A proof follows by comparing with the corresponding geometric series with ratio r. Details will be given in full in the third year course. □

6.22. Example. Let $a_n = \dfrac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$. Then $\sum a_n$ is convergent.

Solution. We look the ratio of adjacent terms in the series (of positive terms).

$$\frac{(n+1)^{\text{st}}\text{ term}}{n^{\text{th}}\text{ term}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{2^n n!n!}$$
$$= \frac{2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2n+1} \to \frac{1}{2} \quad \text{as } n \to \infty.$$

Since the ratio of adjacent terms in the series tends to a limit which is < 1, the series converges by the ratio test.

6.4 Absolute and Conditional Convergence

So far most of our work has been with series all of whose terms are positive. There is a good reason for this; there is very little we can say about series with mixed signs. Indeed there is just one useful result at this level, which is the topic of this section.

The easiest case occurs when the series really can be thought of as a series of positive terms.

6.23. Definition. The series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is **absolutely convergent** iff the series $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ is convergent.

6.24. Definition. The series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is **conditionally convergent** if and only if the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent but not absolutely convergent.

6.25. Example. Show that the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ is absolutely convergent.

Solution. We have $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ and this is convergent by 6.19. So $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ is absolutely convergent.

Note: We choose to work with the sign $(-1)^{n+1}$ rather than $(-1)^n$ simply for tidiness; it is usual to start a series with a positive term, so the coefficient of a_1 is chosen to be $+$. Thus that of a_2 must be $-$ etc if the series is to alternate.

6.26. Exercise. Show that the series $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \log n}$ is absolutely convergent.

6.27. Exercise. Show that the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ is absolutely convergent. [Hint: note that $|\sin n| \le 1$, and use the comparison test.]

Our interest in absolutely convergent series starts by observing that they are in fact all convergent. Indeed this is the easiest way to show a series is convergent if the terms are not all positive.

6.28. Proposition. *An absolutely convergent series is convergent.*

Proof. Assume that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is absolutely convergent, and define

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{if } a_n > 0 \\ 0 & \text{if } a_n \leq 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad a_n^- = \begin{cases} |a_n| & \text{if } a_n < 0 \\ 0 & \text{if } a_n \geq 0 \end{cases}$$

The point of this definition is that

$$0 \leq a_n^+ \leq |a_n| \quad \text{and} \quad 0 \leq a_n^- \leq |a_n| \quad \text{for all n,} \tag{6.1}$$

so we have two new series of positive terms, while

$$|a_n| = a_n^+ + a_n^- \quad \text{and} \quad a_n = a_n^+ - a_n^-.$$

Using equation 6.1 to compare with the convergent series $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, we see that each of

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

is a convergent series of positive terms. Thus

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

is also convergent using 6.11. □

This gives one way of proving that a series is convergent even if the terms are not all positive, and so we can't use the comparison test directly. There is essentially only one other way, which is a very special, but useful case known as Leibniz theorem, or the theorem on alternating signs, or the **alternating series test**. We give the proof because the argument is so like the proof of the convergence of the ratio of adjacent terms in the Fibonacci series 3.1.

Warning: Note how we usually talk about the "Fibonacci series", even though it is a *sequence* rather than a series. Try not to be confused by this popular but inaccurate usage.

6.29. Theorem. ***Leibniz Theorem*** *Let $\{a_n\}$ be a* ***decreasing*** *sequence of* ***positive*** *terms such that $a_n \to 0$ as $n \to \infty$. Then the series*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad \textit{is convergent.}$$

Proof. Write S_n for the n^{th} partial sum of the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$. We show this sequence has the same type of oscillating behaviour that the corresponding sequence of partial sums in the Fibonacci example. By definition, we have

$$\begin{aligned} s_{2n+1} &= a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \\ s_{2n-1} &= a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_{2n-1} \end{aligned}$$

and so, subtracting, we have

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1}.$$

Since $\{a_n\}$ is a decreasing sequence, $a_{2n} > a_{2n+1}$ and so $s_{2n+1} < s_{2n-1}$. Thus we have a decreasing sequence

$$s_1 > s_3 > s_5 > \ldots > s_{2n-1} > s_{2n+1} > \ldots.$$

Similarly $s_{2n} > s_{2n-2}$ and we have an increasing sequence

$$s_2 < s_4 < s_6 \ldots < s_{2n-2} < s_{2n} < \ldots.$$

Also

$$s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1} > s_{2n}$$

Thus

$$s_2 < s_4 < s_6 \ldots < s_{2n-2} < s_{2n} < s_{2n+1} < s_{2n-1} < \ldots s_5 < s_3 < s_1$$

and the sequence s_1, s_3, s_5, $\ldots$ is a decreasing sequence which is bounded below (by s_2), and so by 3.9 is convergent to α (say). Similarly s_2, s_4, s_6, $\ldots$ is an increasing sequence which is bounded above (by s_1), and so by 3.9 is convergent to β (say) also

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$$

and so letting $n \to \infty$

$$\alpha - \beta = 0$$

So $\alpha = \beta$, and all the partial sums are tending to α, so the series converges. $\square$

6.30. Example. Show that the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ is conditionally convergent.

Solution. We have $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ and this is divergent by 6.19; thus the series is *not* absolutely convergent. We show using 6.29 that this series is still convergent, and so is conditionally convergent.

Write $a_n = 1/n$, so $a_n > 0$, $a_{n+1} < a_n$ and $a_n \to 0$ as $n \to \infty$. Thus all the conditions of Leibniz's theorem are satisfied, and so the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ is convergent.

6.31. Proposition (Re-arranging an Absolutely convergent Series). *Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be an absolutely convergent series and suppose that $\{b_n\}$ is a re-arrangement of $\{a_n\}$. Then $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is convergent, and*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Proof. See next year, or (Spivak 1967); the point here is that we need *absolute convergence* before series behave in a reasonable way. □

Warning: It is not useful to re-arrange conditionally convergent series (remember the rearrangement I did in section 1.1). There is a result which is an extreme form of this:

> Pick $x \in \mathbb{R}$, and let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be a conditionally convergent series. then there is a re-arrangement $\{b_n\}$ of $\{a_n\}$ such that $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = x$!

In other words, we can re-arrange to get any answer we want!

6.5 An Estimation Problem

This section shows how we can use a lot of the earlier ideas to produce what is often wanted in practice — results which are an approximation, together with an indication of how good the approximation is.

> Find how accurate the approximation obtained by just using the first ten terms is, to $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Again we are going to use geometrical methods for this. Our geometric statement follows from the diagram, and is the assertion that the area of the rectangles below the curve is less than the area under the curve, which is less than the area of the rectangles which contain the curve.

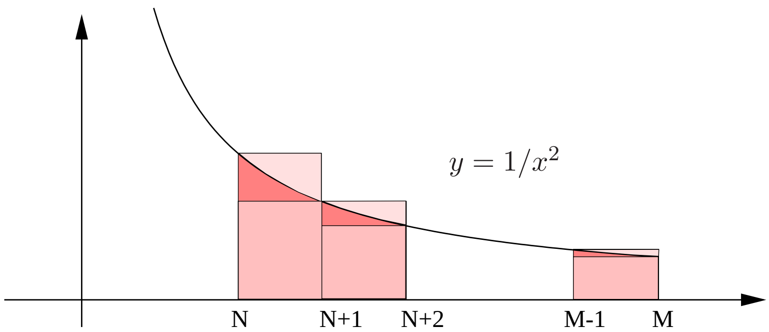


Figure 6.3: An upper and lower approximation to the area under the curve

Writing this out geometrically gives the statement:

$$\sum_{n=N+1}^{M} \frac{1}{n^2} \le \int_N^M \frac{dx}{x^2} \le \sum_{n=N}^{M-1} \frac{1}{n^2}$$

We can evaluate the middle integral:

$$\int_N^M \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_N^M = \frac{1}{N} - \frac{1}{M}.$$

For convenience, we define

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{and} \quad S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}.$$

We can now express our inequality in these terms:

$$S_M - S_N \le \frac{1}{N} - \frac{1}{M} \le S_{M-1} - S_{N-1}$$

Next, let $M \to \infty$, so $S_M \to S$, and $1/M \to 0$. We have

$$S - S_N \le \frac{1}{N} \le S - S_{N-1}$$

Replacing N by $N+1$, gives another inequality, which also holds, namely

$$S - S_{N+1} \le \frac{1}{N+1} \le S - S_N,$$

and combining these two, we have

$$S - S_{N+1} \le \frac{1}{N+1} \le S - S_N \le \frac{1}{N} \le S - S_{N-1}.$$

In particular, we have both upper and lower bounds for $S - S_N$, as

$$\frac{1}{N+1} \le S - S_N \le \frac{1}{N}.$$

To make the point that this is a useful statement, we now specialise to the case when $N = 10$. Then

$$\frac{1}{11} \le S - S_{10} \le \frac{1}{10} \quad \text{or} \quad 0 \le S - \left(S_{10} + \frac{1}{11}\right) \le \frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \frac{1}{110}.$$

Our conclusion is that although S_{10} is not a very good approximation, we can describe the error well enough to get a much better approximation.

bij Ian Craw: Intro Calculus and Analysis Chapter G7

Power Series

(G7.1) notatie: *Laat a een rij zijn, waarbij de indexen lopen vanaf 0. Dan kun je hierbij de* **machtreeks** *(***power series** *maken:*

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n$$

Dat is dus een functie in x, waarbij het domein gedefinieerd is als de verzameling getallen x zodat

$$k \mapsto \sum_{n=0}^{k} a_n \, x^n$$

convergente is, oftewel zodat $\sum a_n \, x^n$ convergent is.

Antwoorden bij chapter 7

7.8

$$a_n = \frac{1}{1+n^2}$$

De convergentiestraal bereken we door de limiet van $n \mapsto \frac{a_n+1}{a_n}$ te nemen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2+1}}{\frac{1}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

Opgave

opgave G7.1 — *oefening*

Wat is de convergentiestraal van $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2}{n^3 - n^2 + 1} x^n$?

opgave G7.2 — *oefening*

Bereken de convergentiestraal van $\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{2^k+1}\, x^k$.

Chapter 7

Power Series

7.1 Power Series and the Radius of Convergence

In Section 5.6, we met the idea of writing $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, to express a function in terms of its Taylor polynomial, together with a remainder. We even saw in 5.30 that, for some functions, the remainder $R_n(x) \to 0$ as $n \to \infty$ for each fixed x. We now recognise this as showing that certain series converge.

We have more effective ways of showing that such a series converges — we can use that ratio test. But note that such a test will only show that a series converges, not that it converges to the function used to generate it in the first place. We saw an example of such a problem in the Warning before Example 5.36.

To summarise the results we had in Section 5.6,

7.1. Proposition. *The following series converge for all values of x to the functions shown:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots \frac{x^n}{n!} + \ldots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots
\end{aligned}$$

These are all examples of the subject of this section; they are real power series, which we can use to define functions. The corresponding functions are the best behaved of all the classes of functions we meet in this course; indeed are as well behaved as could possibly be expected. We shall see in this section that this class of functions are really just "grown up polynomials", and that almost any manipulation valid for polynomials remains valid for this larger class of function.

7.2. Definition. A **real power series** is a series of the form $\sum a_n x^n$, where the a_n are real numbers, and x is a real variable.

We are thus dealing with a whole collection of series, one for each different value of x. Our hope is that there is some coherence; that the behaviour of series for different values of x are related in some sensible way.

7.3. Example. The geometric series $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ is another example of a power series we have already met. We saw this series is convergent for all x with $|x| < 1$.

It turns out that a power series is usually best investigated using the ratio test, Theorem 6.21. And the behaviour of power series is in fact very coherent.

7.4. Theorem (Radius of Convergence). *Suppose $\sum a_n x^n$ is a power series. Then one of the following happens:*

- *$\sum a_n x^n$ converges only when $x = 0$; or*
- *$\sum a_n x^n$ converges absolutely for all x; or*
- *there is some number $R > 0$ such that $\sum a_n x^n$ converges absolutely for all x with $|x| < R$, and diverges for all x with $|x| > R$.*

No statement is made in the third case about what happens when $x = R$.

7.5. Definition. The number R described above is called the **radius of convergence** of the power series. By allowing $R = 0$ and $R = \infty$, we can consider *every* power series to have a radius of convergence.

Thus every power series has a radius of convergence. We sometimes call the interval $(-R, R)$, where the power series is guaranteed to converge, the **interval of convergence**. It is characterised by the fact that the series converges (absolutely) inside this interval and diverges outside the interval.

- The word "radius" is used, because in fact the same result is true for complex series, and then we have a genuine circle of convergence, with convergence for all (complex) z with $|z| < R$, and guaranteed divergence whenever $|z| > R$.
- Note the power of the result; we are guaranteed that when $|x| > R$, the series diverges; it can't even converge "accidentally" for a few $x's$ with $|x| > R$. Only on the circle of convergence is there ambiguity.

This regularity of behaviour makes it easy to investigate the radius of convergence of a power series using the ratio test.

7.6. Example. Find the radius of convergence of the series $\displaystyle\sum \frac{nx^n}{2^{n+1}}$.

Solution. Recall that the ratio test only applies to series of positive terms, so we look at the ratio of the moduli.

$$\begin{aligned}
\frac{|(n+1)^{\text{st}} \text{ term}|}{|n^{\text{th}} \text{ term}|} &= \frac{(n+1)|x|^{n+1}}{2^{n+2}} \frac{2^{n+1}}{n|x|^n} \\
&= \frac{(n+1)|x|}{n.2} \to \frac{|x|}{2} \quad \text{as } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Thus the given series diverges if $|x| > 2$ and converges absolutely (and so of course converges) if $|x| < 2$. Hence it has radius of convergence 2.

7.7. Example. Find the radius of convergence of the series $\sum \dfrac{(-1)^n n! x^n}{n^n}$.

Solution. This one is a little more subtle than it looks, although we have met the limit before. Again we look at the ratio of the moduli of adjacent terms.

$$\begin{aligned} \frac{|(n+1)^{\text{st}} \text{ term}|}{|n^{\text{th}} \text{ term}|} &= \frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!|x|^n} = (n+1).|x|.\frac{n^n}{(n+1)^{(n+1)}} \\ &= \frac{n^n}{(n+1)^n}|x| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |x| \\ &= \frac{|x|}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} \to \frac{|x|}{\mathrm{e}} \quad \text{as } n \to \infty. \end{aligned}$$

Here we have of course used the result about e given in Section 3.1 to note that

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e} \quad \text{as } n \to \infty.$$

Thus the given series diverges if $|x| > \mathrm{e}$ and converges absolutely (and so of course converges) if $|x| < \mathrm{e}$. Hence it has radius of convergence e.

7.8. Exercise. Find the radius of convergence of the series $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$

We noted that the theorem gives no information about what happens when $x = R$, i.e. on the circle of convergence. There is a good reason for this — it is quite hard to predict what happens. Consider the following power series, all of which have radius of convergence 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 2^n}.$$

The first is divergent when $x = 2$ and when $x = -2$, the second converges when $x = -2$, and diverges when $x = 2$, while the third converges both when $x = 2$ and when $x = -2$. These results are all easy to check by direct substitution, and using Theorem 6.29.

7.2 Representing Functions by Power Series

Once we know that a power series has a radius of convergence, we can use it to define a function. Suppose the power series $\sum a_n x^n$ has radius of convergence $R > 0$, and let $I = (-R, R)$. We now define a function f on this open interval I as follows:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{for } x \in I.$$

It turns out that this is the last, and best behaved of the classes of functions we study in this course.

In fact all of what we say below remains true when $R = \infty$, provided we interpret the open interval I as $\mathbb{R}$.

7.9. Theorem. *Let $\sum a_n x^n$ be a power series with radius of convergence $R > 0$. Let I be the open interval $(-R, R)$, and define $f(x) = \sum a_n x^n$ for $x \in I$. Then $\sum n a_n x^{n-1}$ has radius of convergence R, f is differentiable on I, and*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \textit{for } x \in I.$$

We summarise this result by saying that we can differentiate a power series term - by - term everywhere inside the circle of convergence. If $R = \infty$, then this can be done for all x.

Proof. Quite a lot harder than it looks; we need to be able to re-arrange power series, and then use the Mean Value Theorem to estimate differences, and show that even when we add an infinite number of errors, they don't add up to too much. It can be found e.g. in (Spivak 1967). □

7.10. Corollary. *Let f and I be defined as 7.9. Then f has an indefinite integral defined on I, given by*

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)} x^{n+1} \quad \textit{for } x \in I.$$

Proof. Apply 7.9 to G to see that $G'(x) = f(x)$, which is the required result. □

7.3 Other Power Series

We now derive some further power series to add to the collection described in 7.1. Starting with the geometric series

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \qquad \text{for } |x| < 1, \tag{7.1}$$

we replace x by $-x$ to get

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \qquad \text{for } |x| < 1.$$

Integrating both sides then gives

$$\log(1+x) = K + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \quad \text{for } |x| < 1,$$

where K is a constant of integration. Evaluating both sides when $x = 0$ shows that $K = 0$, and so we get the series

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad \text{valid for } |x| < 1. \tag{7.2}$$

Note: It is easy to get this result directly from the Taylor Series. The next one is not quite so easy.

We return to equation 7.1, and replace x by $-x^2$ to get

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots \quad \text{for } |x| < 1.$$

Again integrating both sides, we have

$$\arctan(x) = K + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \quad \text{for } |x| < 1,$$

where K is a constant of integration. Again putting $x = 0$ shows that $K = 0$, and so

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{valid for } |x| < 1. \tag{7.3}$$

7.11. Example. Find the radius of convergence R of the power series

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3.2} + \frac{x^4}{4.3} - \frac{x^5}{5.4} \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)} + \cdots$$

By differentiation or otherwise, find the sum of the series for $|x| < R$.

[You may assume, without proof, that

$$\int \log(1+x)\, dx = K + x\log(1+x) - x + \log(1+x),$$

for some constant of integration K.]

Solution. Apply the ratio test to the given power series. Then

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1} n(n-1)}{x^n n(n+1)}\right| \to |x| \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

Thus the new series has radius of convergence 1. Denote its sum by $f(x)$, defined for $|x| < 1$. Inside the circle of convergence, it is permissible to differentiate term - by - term, and thus $f'(x) = \log(1+x)$ for $|x| < 1$, since they have the same power series. Hence

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \log(1+x)\, dx = K + x\log(1+x) - \int \frac{x+1-1}{1+x}\, dx & (7.4) \\ &= K + x\log(1+x) - x + \log(1+x). & (7.5) \end{aligned}$$

Putting $x = 0$ shows that $K = 0$ and so $f(x) = (1+x)\log(1+x) - x$.

We have now been able to derive a power series representation for a function without working directly from the Taylor series, and doing the differentiations — which can often prove very awkward. Nevertheless, we have still found the Taylor coefficients.

7.12. Proposition. *Let $\sum a_n x^n$ be a power series, with radius of convergence $R > 0$, and define*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \textit{for } |x| < R.$$

Then $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$, so the given series is *the Taylor (or Maclaurin) series for f*

Proof. We can differentiate n times by 7.9 and we still get a series with the same radius of convergence. Also, calculating exactly as in the start of Section 5.6, we see that the derivatives satisfy $f^{(n)}(0) = n!a_n$, giving the uniqueness result. □

7.13. Example. Let $f(x) = \dfrac{1}{1-x^3}$. Calculate $f^{(n)}(0)$.

Solution. We use the binomial theorem to get a power series expansion about 0,

$$\frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots + x^{3n} + \ldots \quad \text{valid for } |x| < 1.$$

We now read off the various derivatives. Clearly $f^{(n)}(0) = 0$ unless n is a multiple of 3, while $f^{(3k)}(0) = (3k)!$ by 7.12.

7.4 Power Series or Function

We have now seen that when a power series is used to define a function, then that function is *very* well behaved, and we can manipulate it by manipulating, in the obvious way, the corresponding power series. However there are snags. A function has *one* definition which works everywhere it makes sense (at least for simple functions), whereas the power series corresponding to a function depends also on the point about which the expansion is happening. An example will probably make this clearer than further discussion.

7.14. Example. Give the power series expansions for the function $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Solution. We can already do this about 0 by the Binomial Theorem; we have:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \quad \text{for } |x| < 1.$$

To expand about a different point, e.g. about 3, write $y = x - 3$. Then

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-(y+3)} = \frac{1}{-2-y} = -\frac{1}{2}.\frac{1}{1-y/2},$$

and again using the Binomial Theorem on the last representation, we have

$$\frac{1}{1-x} = -\frac{1}{2}\left(1 + y/2 + y^2/4 + y^3/9 + \ldots + y^n/2^n + \ldots\right) \quad \text{for } |y/2| < 1.$$

Writing this in terms of x gives

$$\frac{1}{1-x} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x-3}{2} + \frac{(x-3)^2}{4} + \ldots + \frac{(x-3)^n}{2^n} + \ldots\right) \quad \text{for } |x-3| < 2.$$

It should be no surprise that this is the Taylor series for the same function about the point 3. And it is in fact not an accident that the radius of convergence of the new series is 2. More investigation (quite a lot more - mainly for complex functions) shows the radius of convergence is always that of the *largest* circle that can be fitted into the domain of definition of the function. And that is why it is of interest to sometimes consider power series as complex power series. The power series expansion for $(1 + x^2)^{-1}$ has radius of convergence 1. This seems implausible viewed with real spectacles, but totally explicable when it is realised that the two points i and $-i$ are stopping the expansion from being valid in a larger circle.

7.5 Applications*

This section will not be formally examined, but is here to show how we can get more interesting results from power series.

7.5.1 The function e^x grows faster than any power of x

Specifically, we claim that for any $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha}\,\mathrm{e}^x = \infty$.

We have

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{and so} \quad x^{-\alpha}\,\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Given α, we can always find some N such that $N - \alpha \geq 1$. Next note that provided $x > 0$, each term in the series for $x^{-\alpha}\,\mathrm{e}^x$ is positive, and hence the sum is greater than any given term. So in particular,

$$x^{-\alpha}\,\mathrm{e}^x > \frac{x^{N-\alpha}}{N!} \geq \frac{x}{N!} \quad \text{if } x > 1.$$

In particular, since N is fixed, $\dfrac{x}{N!} \to \infty$ as $x \to \infty$, giving the result claimed.

7.5.2 The function $\log x$ grows more slowly than any power of x

Specifically, we claim that for any $\beta > 0$, $\lim_{x\to\infty} x^{-\beta}\log x = 0$.

We are interested in what happens when $x \to \infty$, so we will restrict to the situation when $x > 0$. Put $y = \beta \log x$, noting this is possible since $x > 0$. Thus $y/\beta = \log x$, or equivalently, $x = \mathrm{e}^{y/b}$. Thus we have $x^\beta = \mathrm{e}^y$, and so

$$x^{-\beta}\log x = \frac{y}{\beta}.\,\mathrm{e}^{-y} \quad \text{when } y = \beta \log x. \tag{7.6}$$

Since $\beta > 0$, as $x \to \infty$, so $y \to \infty$. But from our previous result, as $y \to \infty$, so $\beta y^{-1}\,\mathrm{e}^Y \to \infty$, which is the same as saying that $\dfrac{y}{\beta}.\,\mathrm{e}^{-y} \to 0$ as $y \to \infty$. this is the required result by equation 7.6.

7.5.3 The probability integral $\int_0^\alpha \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$

The normal distribution is a very common model throughout the whole of science for the situation when things occur "at random". In particular, probability theory attempts to predict what will happen "on average", perhaps for computing risks and premiums on life insurance; in so doing one is often led to consider an integral of the form

$$I = \int_0^\alpha \mathrm{e}^{-x^2}\,dx.$$

It turns out that this integral cannot be evaluated using the usual tricks — substitution, integration by parts etc. But a power series representation and Corollary 7.10 *can* help.

Thus

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ e^{-x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \end{aligned}$$

and we can integrate this term-by term, by Corollary 7.10, to get

$$\int e^{-x^2}\, dx = K + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

Performing a definite integral removes the constant of integration, to give

$$\int_0^{\alpha} e^{-}\, x^2\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

The partial sums of the power series on the right can be computed, and converge quite quickly, so we have a practical method of evaluating the integral, even thought we can't "do" the integral.

7.5.4 The number e is irrational

We use a power series argument, together with a proof by contradiction, as was done to show that $\sqrt{2}$ was irrational. So assume, to get our contradiction, that e is rational, so it can be written in the form $e = a/b$, where a and b are integers. Note that this means $e^{-1} = b/a$. From the exponential series,

$$\frac{b}{a} = e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

and so, multiplying through by $a!$,

$$\frac{b}{a}.a! = e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.a!}{n!}.$$

Thus, we have

$$\begin{aligned} b(a-1)! &= a! - \frac{a!}{1!} + \frac{a!}{2!} - \frac{a!}{3!} + \dots \\ &= a! - \frac{a!}{1!} + \frac{a!}{2!} - \frac{a!}{3!} + \dots + \frac{(-1)^a a!}{a!} \\ &+ (-1)^{a+1} \left\{ \frac{1}{a+1} - \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)} - \dots \right\}. \end{aligned}$$

The left hand side is an integer, as is each of the terms in the sum

$$a! - \frac{a!}{1!} + \frac{a!}{2!}\frac{a!}{3!} + \dots + \frac{(-1)^a a!}{a!};$$

it follows that the rest of that equation is an integer, so

$$(-1)^{a+1}\left\{\frac{1}{a+1}-\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)}-\dots\right\}$$

is an integer. But this is an alternating sequence of positive terms, which decreases to 0, and so by 6.29, is convergent to a sum which lies between the first two partial sums. The first partial sum is $\dfrac{1}{a+1}$ while the second is $\dfrac{1}{a+2}$ (check this). So there must be an integer between $\dfrac{1}{a+1}$ and $\dfrac{1}{a+2}$. Since there is not, this contradiction demonstrates our initial assertion.

bij W.W.L.Cheng and X.T.Duong: Introduction to Integration G14

Integrals

Hier volgen een paar aanvullende voorbeelden voor technieken van integreren.

Let op het domein!

Let op:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = -\frac{1}{2} - -2 = 1\frac{1}{2}$$

Maar

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3} dx$$

kun je niet op die manier aanpakken, omdat $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ niet een continue functie op $[-1, 1]$ is.

Je zou hier moeten splitsen in twee stukken: van -1 tot 0 (via

$$\lim_{t \nearrow 0} \int_{-1}^{t} \frac{1}{x^3} dx$$

en van 0 tot 1 (via net zo'n limiet van rechts naar 0) en dan de som nemen. Dat levert ∞ op.

Notatie

Omdat een primitieve van een continue functie op een interval vastligt op een constante na krijg je bijvoorbeeld

$$\int x^2 = \frac{1}{3}x^3 + C \quad \text{met } C \text{ een onbepaalde constante}$$

Maar als links en recht van het =-teken een onbepaald-integraalteken staat, zetten we die constante er niet bij. In feite is dat =-teken dan een beetje abnormaal: het betekent dat links en rechts formules voor functies staan die op een constante functie na gelijk zijn. Fraai is anders, maar handig is het wel, en bovendien gebruikelijk.

Substitutie versie 1

Ik geef hier een nadere uitwerking van example 14.2.1:

Gezocht:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{en} \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Duidelijk is dat we x moeten beperken: $-1 < x < 1$, anders staat er onzin.

Idee (je moet er maar op komen!): laten we x zien als $\sin(t)$:

$$x = \sin(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos(t)$$

Zonder al te diep nadenken zetten we dit om in

$$dx = \cos(t)\, dt$$

Invullen levert:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(t))^2}} \cos(t)\, dt$$

Dit is in feite onzin: links zou een primitieve van een functie in x moeten zijn, rechts een primitieve van een functie in t. Om dit tot zinnig te kunnen verklaren moet je nu ook die primitieve functie van x omzetten in een functie van t door x te vervangen door $\sin(t)$. Als je dat doet, wordt het ook begrijpelijk wat hier gebeurt.
In feite doen we het volgende:

- We zoeken een primitieve functie F van een gegeven functie f.
  (Denk aan functies in x; in bovenstaand voorbeeld: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.)
- We verzinnen nu een functie u en vervangen als het ware de x door $u(t)$ (denk aan u als een functie in t, zoals in het voorbeeld: $t \mapsto \sin(t)$)).
- Daarmee krijgen we

  $$F(u(t)) = \int f(u(t))\, u'(t)\, dt$$

  Dat is correct, want volgens de kettingregel geldt:

  $$(F \circ u)' = F' \circ u \cdot u' = f \circ u \cdot u'$$

  In het bovenstaande voorbeeld kun je dit lezen als:

  $$\int_0^{\sin(t)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(t))^2}} \cdot \cos(t)\, dt$$

Nu gebruiken we dat $1 - (\sin(t))^2 = (\cos(x))^2$.
(In feite is dit een formule die het idee om x door $\sin(t)$ te vervangen kan oproepen bij het zien van de opgave.)
Verder kun je $\sin(t)$ laten lopen van -1 tot 1 door t te laten lopen van $-\frac{1}{2}\pi$ tot $\frac{1}{2}\pi$

$$-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$$

en het leuke is dat dan $\cos(t) > 0$, dus $\sqrt{(\cos(t))^2} = \cos(t)$. Dat levert

$$\int \frac{1}{\cos(t)} \cos(t)\, dt = \int 1\, dt = t + C \quad \text{met } C \in R$$

Om nu de gevraagde primitieve functie (in x) te vinden, moeten we de t terugrekenen naar x. Gelukkig kan dat probleemloos door de eis dat $-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$:

$$t = \arcsin(x)$$

Resultaat:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \;=\; \arcsin(x) + C$$

In feite is dit een bekende formule, maar bovenstaande is bedoeld als voorbeeld voor de gevolgde methode. Het is op zich een goed idee om ieder resultaat van primitiveren te controleren door te differentiëren. Als je daarbij geen formule voor de afgeleide van arcsin weet, is het handig arcsin∘sin te differentiëren met de kettingregel; het resultaat is de afgeleide van $x \mapsto x$, dus de constante functie 1.

De bepaalde integraal gaat net zo, behalve de laatste stap: die is dan overbodig:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Substitueer $x = \sin(t), dx = \cos(t)\, dt$ en laat de grenzen lopen van $t = -\frac{1}{6}\pi$ (want $\sin(-\dfrac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}$) tot $t = \frac{1}{2}\pi$ (want $\sin(\dfrac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$):

$$= \int_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{6}\pi} \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(t))^2}} \cos(t)\, dt$$

Op dezelfde manier kunnen we dit vereenvoudigen tot

$$= \int_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{6}\pi} 1\, dt = \frac{1}{3}\pi$$

Partiëel integreren

Naast de kettingregel kan ook de productregel van het differentiëren goed van pas komen bij het integreren:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\int (u(x) \cdot v(x))'\, dx = \int u'(x) \cdot v(x)\, dx \; + \; \int u(x) \cdot v'(x)\, dx$$

$$u(x) \cdot v(x) + C = \int u'(x) \cdot v(x)\, dx \; + \; \int u(x) \cdot v'(x)\, dx$$

Het is dus stuivertje wisselen: als je de ene integraal rechts kunt uitrekenen, kun je nu de andere ook vinden.
Je kunt dat zó noteren: laat f en g functies zijn (met geschikt domein: daar moet je in de praktijk op letten, doen we hier even niet). Dan

$$\int f(x) \cdot g(x)\, dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\, dx$$

waar F een primitieve functie van f is.
Er zijn een aantal methoden om de verwarring en vergissingen met deze methode enigszins te beperken. Ik doe het zó:

$$\int f(x) \nearrow \cdot g(x) \searrow \; dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\, dx$$

(G14.1) *voorbeeld:*

$$\int x\, e^{3x}\, dx =$$

$$\int x \searrow \cdot e^{3x} \nearrow \; dx =$$

$$= x \cdot \frac{1}{3} e^{3x} - \int 1 \cdot \frac{1}{3} e^{3x}\, dx =$$

$$= x \cdot \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C \quad \text{met } C \in R$$

einde voorbeeld

(G14.2) *voorbeeld:*

$$\int x\cos(x)\,dx =$$

$$\int x \searrow \cdot \cos(x) \nearrow \; dx =$$

$$= x\cdot\sin(x) - \int 1\cdot\sin(x)\,dx =$$

$$= x\cdot\sin(x) + \cos(x) + C$$

einde voorbeeld

(G14.3) *voorbeeld:*

$$\int \ln(1+x)\,dx =$$

$$\int 1 \nearrow \cdot \ln(1+x) \searrow \; dx =$$

$$= x\cdot\ln(1+x) - \int x\cdot\frac{1}{1+x}\,dx =$$

$$= x\cdot\ln(1+x) - \int \frac{x}{1+x}\,dx =$$

$$= x\cdot\ln(1+x) - \int \frac{1+x-1}{1+x}\,dx =$$

$$= x\cdot\ln(1+x) - \int (\frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x})\,dx =$$

$$= x\cdot\ln(1+x) - \int (1 - \frac{1}{1+x})\,dx =$$

$$= x\cdot\ln(1+x) - \int 1\,dx + \int \frac{1}{1+x})\,dx =$$

$$= x\cdot\ln(1+x) - x + \ln(1+x) + C$$

einde voorbeeld

ELEMENTARY MATHEMATICS

W W L CHEN and X T DUONG

Chapter 14

INTRODUCTION TO INTEGRATION

14.1. Antiderivatives

In this chapter, we discuss the inverse process of differentiation. In other words, given a function $f(x)$, we wish to find a function $F(x)$ such that $F'(x) = f(x)$. Any such function $F(x)$ is called an antiderivative, or indefinite integral, of the function $f(x)$, and we write

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

A first observation is that the antiderivative, if it exists, is not unique. Suppose that the function $F(x)$ is an antiderivative of the function $f(x)$, so that $F'(x) = f(x)$. Let $G(x) = F(x) + C$, where C is any fixed real number. Then it is easy to see that $G'(x) = F'(x) = f(x)$, so that $G(x)$ is also an antiderivative of $f(x)$. A second observation, somewhat less obvious, is that for any given function $f(x)$, any two distinct antiderivatives of $f(x)$ must differ only by a constant. In other words, if $F(x)$ and $G(x)$ are both antiderivatives of $f(x)$, then $F(x) - G(x)$ is a constant. In this chapter, we shall denote any such constant by C, with or without subscripts.

An immediate consequence of this second observation is the following simple result related to the derivatives of constants in Section 11.1.

ANTIDERIVATIVES OF ZERO. *We have*

$$\int 0\,\mathrm{d}x = C.$$

In other words, the antiderivatives of the zero function are precisely all the constant functions.

Indeed, many antiderivatives can be obtained simply by referring to various rules concerning derivatives. We list here a number of such results. The first of these is related to the constant multiple rule for differentiation in Section 11.2.

† This chapter was written at Macquarie University in 1999.

CONSTANT MULTIPLE RULE. *Suppose that a function $f(x)$ has antiderivatives. Then for any fixed real number c, we have*

$$\int cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

ANTIDERIVATIVES OF POWERS.
(a) Suppose that n is a fixed real number such that $n \neq -1$. Then

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C.$$

(b) We have

$$\int x^{-1}\,\mathrm{d}x = \log|x| + C.$$

PROOF. Part (a) is a consequence of the rule concerning derivatives of powers in Section 11.1. If $x > 0$, then part (b) is a consequence of the rule concerning the derivative of the logarithmic function in Section 12.3. If $x < 0$, we can write $|x| = u$, where $u = -x$. It then follows from the Chain rule that

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log|x|) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\log u) = -\frac{1}{u} = \frac{1}{x} \tag{1}$$

again. ♣

Corresponding to the sum rule for differentiation in Section 11.2, we have the following.

SUM RULE. *Suppose that functions $f(x)$ and $g(x)$ have antiderivatives. Then*

$$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

We next consider trigonometric functions.

ANTIDERIVATIVES OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS.
(a) We have

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C \qquad \textit{and} \qquad \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C.$$

(b) We have

$$\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x + C \qquad \textit{and} \qquad \int \csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\cot x + C.$$

(c) We have

$$\int \tan x \sec x\,\mathrm{d}x = \sec x + C \qquad \textit{and} \qquad \int \cot x \csc x\,\mathrm{d}x = -\csc x + C.$$

(d) We have

$$\int \sec x\,\mathrm{d}x = \log|\tan x + \sec x| + C \qquad \textit{and} \qquad \int \csc x\,\mathrm{d}x = -\log|\cot x + \csc x| + C.$$

PROOF. Parts (a)–(c) follow immediately from the rules concerning derivatives of the trigonometric functions in Section 11.3. Part (d) follows from Example 12.3.12 and Example 12.3.13 if we note (1). ♣

Corresponding to the rule concerning the derivative of the exponential function in Section 12.3, we have the following.

ANTIDERIVATIVES OF THE EXPONENTIAL FUNCTION. *We have*

$$\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C.$$

EXAMPLE 14.1.1. Using the sum rule, the constant multiple rule and the rule concerning antiderivatives of powers, we have

$$\int (x^2 + 3x + 1)\,\mathrm{d}x = \int x^2 \,\mathrm{d}x + 3\int x \,\mathrm{d}x + \int x^0 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C.$$

EXAMPLE 14.1.2. Using the sum rule and the rules concerning antiderivatives of powers and of trigonometric functions, we have

$$\int (x^3 + \sin x)\,\mathrm{d}x = \int x^3 \,\mathrm{d}x + \int \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 - \cos x + C.$$

EXAMPLE 14.1.3. We have

$$\int (\sin x + \sec x)\,\mathrm{d}x = \int \sin x \,\mathrm{d}x + \int \sec x \,\mathrm{d}x = -\cos x + \log|\tan x + \sec x| + C.$$

EXAMPLE 14.1.4. We have

$$\int (\mathrm{e}^x + 3\cos x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x + 3\int \cos x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + 3\sin x + C.$$

EXAMPLE 14.1.5. To find

$$\int \frac{1-\sin x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x,$$

note first of all that

$$\begin{aligned}\frac{1-\sin x}{1+\sin x} &= \frac{(1-\sin x)(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)} = \frac{1-2\sin x+\sin^2 x}{1-\sin^2 x} = \frac{1-2\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\\ &= \sec^2 x - 2\tan x\sec x + \tan^2 x = 2\sec^2 x - 2\tan x \sec x - 1.\end{aligned}$$

It follows that

$$\int \frac{1-\sin x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = 2\int \sec^2 x \,\mathrm{d}x - 2\int \tan x \sec x \,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x = 2\tan x - 2\sec x - x + C.$$

14.2. Integration by Substitution

We now discuss how we can use the chain rule in differentiation to help solve problems in integration. This technique is usually called integration by substitution. As we shall not prove any result here, our discussion will be only heuristic.

We emphasize that the technique does not always work. First of all, we have little or no knowledge of the antiderivatives of many functions. Secondly, there is no simple routine that we can describe to help us find a suitable substitution even in the cases where the technique works. On the other hand, when the technique does work, there may well be more than one suitable substitution!

REMARK. It is imperative that one does not give up when one's effort does not seem to yield results. We learn far more from indefinite integrals that we cannot find than from those than we can.

INTEGRATION BY SUBSTITUTION – VERSION 1. *If we make a substitution $x = g(u)$, then $\mathrm{d}x = g'(u)\,\mathrm{d}u$, and*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(u))g'(u)\,\mathrm{d}u.$$

EXAMPLE 14.2.1. Consider the indefinite integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

If we make a substitution $x = \sin u$, then $\mathrm{d}x = \cos u\,\mathrm{d}u$, and

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos u}{\sqrt{1-\sin^2 u}}\,\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}u = u + C = \sin^{-1} x + C.$$

On the other hand, if we make a substitution $x = \cos v$, then $\mathrm{d}x = -\sin v\,\mathrm{d}v$, and

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\sin v}{\sqrt{1-\cos^2 v}}\,\mathrm{d}v = -\int \mathrm{d}v = -v + C = -\cos^{-1} x + C.$$

See Section 12.4 concerning derivatives of inverse trigonometric functions.

EXAMPLE 14.2.2. Consider the indefinite integral

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

If we make a substitution $x = \tan u$, then $\mathrm{d}x = \sec^2 u\,\mathrm{d}u$, and

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sec^2 u}{1+\tan^2 u}\,\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}u = u + C = \tan^{-1} x + C.$$

On the other hand, if we make a substitution $x = \cot v$, then $\mathrm{d}x = -\csc^2 v\,\mathrm{d}v$, and

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\csc^2 v}{1+\cot^2 v}\,\mathrm{d}v = -\int \mathrm{d}v = -v + C = -\cot^{-1} x + C.$$

EXAMPLE 14.2.3. Consider the indefinite integral

$$\int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

If we make a substitution $x = u^2 - 1$, then $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$, and

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x &= \int 2(u^2-1)u^2\,\mathrm{d}u = 2\int u^4\,\mathrm{d}u - 2\int u^2\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{2}{5}u^5 - \frac{2}{3}u^3 + C = \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

On the other hand, if we make a substitution $x = v - 1$, then $\mathrm{d}x = \mathrm{d}v$, and

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x &= \int (v-1)v^{1/2}\,\mathrm{d}v = \int v^{3/2}\,\mathrm{d}v - \int v^{1/2}\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{2}{5}v^{5/2} - \frac{2}{3}v^{3/2} + C = \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

We can confirm that the indefinite integral is correct by checking that

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C\right) = x\sqrt{x+1}.$$

INTEGRATION BY SUBSTITUTION – VERSION 2. *Suppose that a function $f(x)$ can be written in the form $f(x) = g(h(x))h'(x)$. If we make a substitution $u = h(x)$, then $\mathrm{d}u = h'(x)\,\mathrm{d}x$, and*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(h(x))h'(x)\,\mathrm{d}x = \int g(u)\,\mathrm{d}u.$$

REMARK. Note that in Version 1, the variable x is initially written as a function of the new variable u, whereas in Version 2, the new variable u is written as a function of x. The difference, however, is minimal, as the substitution $x = g(u)$ in Version 1 has to be invertible to enable us to return from the new variable u to the original variable x at the end of the process.

EXAMPLE 14.2.4. Consider the indefinite integral

$$\int x(x^2+3)^4\,\mathrm{d}x.$$

Note first of all that the derivative of the function x^2+3 is equal to $2x$, so it is convenient to make the substitution $u = x^2+3$. Then $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$, and

$$\int x(x^2+3)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+3)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int u^4\,\mathrm{d}u = \frac{1}{10}u^5 + C = \frac{1}{10}(x^2+3)^5 + C.$$

EXAMPLE 14.2.5. Consider the indefinite integral

$$\int \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x.$$

Note first of all that the derivative of the function $\log x$ is equal to $1/x$, so it is convenient to make the substitution $u = \log x$. Then $\mathrm{d}u = (1/x)\,\mathrm{d}x$, and

$$\int \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \log|u| + C = \log|\log x| + C.$$

EXAMPLE 14.2.6. Consider the indefinite integral

$$\int x^2\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Note first of all that the derivative of the function x^3 is equal to $3x^2$, so it is convenient to make the substitution $u = x^3$. Then $\mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x$, and

$$\int x^2\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int 3x^2\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\mathrm{e}^u + C = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3} + C.$$

A somewhat more complicated alternative is to note that the derivative of the function e^{x^3} is equal to $3x^2\mathrm{e}^{x^3}$, so it is convenient to make the substitution $v = \mathrm{e}^{x^3}$. Then $\mathrm{d}v = 3x^2\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x$, and

$$\int x^2\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int 3x^2\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \mathrm{d}v = \frac{1}{3}v + C = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3} + C.$$

EXAMPLE 14.2.7. Consider the indefinite integral

$$\int \tan^3 x\sec^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Note first of all that the derivative of the function $\tan x$ is equal to $\sec^2 x$, so it is convenient to make the substitution $u = \tan x$. Then $\mathrm{d}u = \sec^2 x\,\mathrm{d}x$, and

$$\int \tan^3 x\sec^2 x\,\mathrm{d}x = \int u^3\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\tan^4 x + C.$$

Occasionally, the possibility of substitution may not be immediately obvious, and a certain amount of trial and error does occur. The fact that one substitution does not appear to work does not mean that the method fails. It may very well be the case that we have used a bad substitution. Or perhaps we may slightly modify the problem first. We illustrate this point by looking at two more examples.

Example 14.2.8. Consider the indefinite integral

$$\int \tan x \,\mathrm{d}x.$$

Here it does not appear that any substitution will work. However, if we write

$$\int \tan x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \,\mathrm{d}x,$$

then we observe that the derivative of the function $\cos x$ is equal to $-\sin x$, so it is convenient to make the substitution $u = \cos x$. Then $\mathrm{d}u = -\sin x \,\mathrm{d}x$, and

$$\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{u} \,\mathrm{d}u = -\log |u| + C = -\log |\cos x| + C.$$

Example 14.2.9. The indefinite integral

$$\int \frac{9 + 6x + 2x^2 + x^3}{4 + x^2} \,\mathrm{d}x$$

is rather daunting at first sight, but we have enough technique to study it. Note first of all that

$$\begin{aligned} 9 + 6x + 2x^2 + x^3 &= 9 + 2x + 2x^2 + 4x + x^3 = 9 + 2x + 2x^2 + x(4 + x^2) \\ &= 1 + 2x + 8 + 2x^2 + x(4 + x^2) = 1 + 2x + 2(4 + x^2) + x(4 + x^2). \end{aligned}$$

It follows that

$$\int \frac{9 + 6x + 2x^2 + x^3}{4 + x^2} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4 + x^2} \,\mathrm{d}x + \int \frac{2x}{4 + x^2} \,\mathrm{d}x + \int (2 + x) \,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

To study the first integral on the right hand side of (2), we can make a substitution $x = 2 \tan u$. Then $\mathrm{d}x = 2 \sec^2 u \,\mathrm{d}u$, and

$$\int \frac{1}{4 + x^2} \,\mathrm{d}x = \int \frac{2 \sec^2 u}{4 + 4 \tan^2 u} \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}u = \frac{1}{2} u + C_1 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) + C_1. \tag{3}$$

To study the second integral on the right hand side of (2), we note that the derivative of the function $4 + x^2$ is equal to $2x$. If we make a substitution $v = 4 + x^2$, then $\mathrm{d}v = 2x \,\mathrm{d}x$, and

$$\int \frac{2x}{4 + x^2} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{v} \,\mathrm{d}v = \log |v| + C_2 = \log(4 + x^2) + C_2. \tag{4}$$

The third integral on the right hand side of (2) is easy to evaluate. We have

$$\int (2 + x) \,\mathrm{d}x = 2x + \frac{1}{2} x^2 + C_3. \tag{5}$$

Substituting (3)–(5) into (2) and writing $C = C_1 + C_2 + C_3$, we obtain

$$\int \frac{9 + 6x + 2x^2 + x^3}{4 + x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) + \log(4 + x^2) + 2x + \frac{1}{2} x^2 + C.$$

It may be worth checking that

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) + \log(4 + x^2) + 2x + \frac{1}{2} x^2 + C \right) = \frac{9 + 6x + 2x^2 + x^3}{4 + x^2}.$$

14.3. Definite Integrals

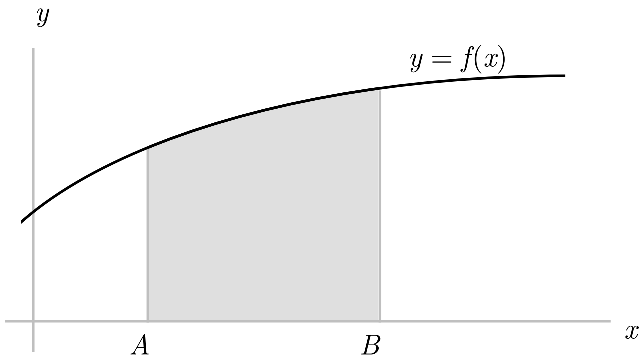
The formal definition of a definite integral is rather complicated, and we do not propose to discuss it here. Instead, we shall only give some geometric motivation, and then relate the definite integral to indefinite integrals we have discussed earlier.

Suppose that $f(x)$ is a real valued function, defined on an interval $[A, B] = \{x \in \mathbb{R} : A \leq x \leq B\}$. We shall suppose also that $f(x)$ has an antiderivative $F(x)$ for every $x \in [A, B]$.

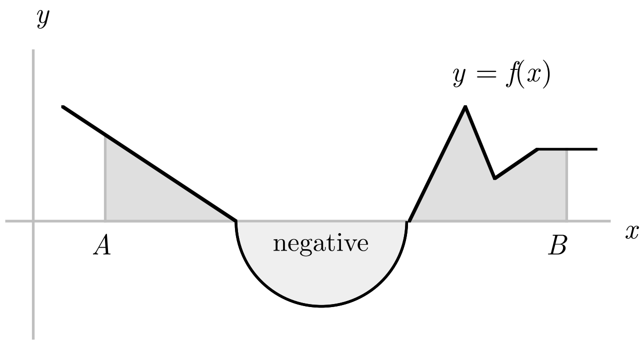
Consider first of all the special case that $f(x) \geq 0$ for every $x \in [A, B]$. By the definite integral

$$\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x,$$

we mean the area below the curve $y = f(x)$ and above the horizontal axis $y = 0$, bounded between the vertical lines $x = A$ and $x = B$, as shown in the picture below.



In general, we take the area between the curve $y = f(x)$ and the horizontal axis $y = 0$, bounded between the vertical lines $x = A$ and $x = B$, with the convention that the area below the horizontal axis $y = 0$ is taken to be negative, as shown in the picture below.



We now need a way of calculating this area. In some very special cases, this is very simple.

Example 14.3.1. If we examine the graph of the trigonometric functions in Chapter 3, then it is easy to see that

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{and} \qquad \int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = 0.$$

In each case, it is easy to see that the area in question above the horizontal axis $y = 0$ is equal to the area in question below this axis.

EXAMPLE 14.3.2. It is easy to see that the area between the line $y = x$ and the horizontal axis $y = 0$, bounded between the vertical lines $x = 0$ and $x = 1$, is the area of a triangle with base 1 and height 1. Hence

$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

In many instances, we do not have such geometric information to help us calculate the area in question. Instead, we can use the indefinite integral.

FUNDAMENTAL THEOREM OF INTEGRAL CALCULUS. *Suppose that a function $F(x)$ satisfies $F'(x) = f(x)$ for every $x \in [A, B]$. Then*

$$\int_A^B f(x) \, \mathrm{d}x = \Big[F(x) \Big]_A^B = F(B) - F(A).$$

REMARK. A simple consequence of the above is that the constant multiple rule and sum rule for indefinite integrals extend to definite integrals. For any fixed real number c, we have

$$\int_A^B cf(x) \, \mathrm{d}x = c \int_A^B f(x) \, \mathrm{d}x.$$

We also have

$$\int_A^B (f(x) + g(x)) \, \mathrm{d}x = \int_A^B f(x) \, \mathrm{d}x + \int_A^B g(x) \, \mathrm{d}x.$$

A further consequence of the Fundamental theorem of integral calculus is a rule concerning splitting up an interval $[A, B]$ into two. Suppose that $A < A^* < B$. Then

$$\int_A^B f(x) \, \mathrm{d}x = \int_A^{A^*} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_{A^*}^B f(x) \, \mathrm{d}x.$$

EXAMPLE 14.3.3. Returning to Example 14.3.1, we have

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = \Big[-\cos x \Big]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = 0$$

and

$$\int_0^{\pi} \cos x \, \mathrm{d}x = \Big[\sin x \Big]_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0.$$

EXAMPLE 14.3.4. Returning to Example 14.3.2, we have

$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2} x \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

EXAMPLE 14.3.5. We have

$$\int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = \Big[-\cos x \Big]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 2.$$

EXAMPLE 14.3.6. We have

$$\int_1^2 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \Big[\log |x| \Big]_1^2 = \log 2 - \log 1 = \log 2.$$

Example 14.3.7. We have

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x\Big]_0^1 = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e} - 1.$$

Example 14.3.8. We have

$$\int_0^{\pi/4} \sec^2 x \,\mathrm{d}x = \Big[\tan x\Big]_0^{\pi/4} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1.$$

Example 14.3.9. We have

$$\int_{-1}^1 (x^3+x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

Example 14.3.10. Recall Example 14.2.1. Since

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \sin^{-1} x + C, \tag{6}$$

we have

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \Big[\sin^{-1} x\Big]_0^{1/2} = \sin^{-1}\frac{1}{2} - \sin^{-1} 0 = \frac{\pi}{6}.$$

To obtain (6), recall that we can use the substitution $x = \sin u$ to show that

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}u = u + C,$$

followed by an inverse substitution $u = \sin^{-1} x$. Here, we need to make the extra step of substituting the values $x = 0$ and $x = 1/2$ to the indefinite integral $\sin^{-1} x$. Observe, however, that with the substitution $x = \sin u$, the variable x increases from 0 to $1/2$ as the variable u increases from 0 to $\pi/6$. But then

$$\int_0^{\pi/6} \mathrm{d}u = \Big[u\Big]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{6} = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

so it appears that we do not need the inverse substitution $u = \sin^{-1} x$. Perhaps we can directly substitute $u = 0$ and $u = \pi/6$ to the indefinite integral u.

DEFINITE INTEGRAL BY SUBSTITUTION – VERSION 1. *Suppose that a substitution $x = g(u)$ satisfies the following conditions:*
(a) There exist $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ such that $g(\alpha) = A$ and $g(\beta) = B$.
(b) The derivative $g'(u) > 0$ for every u satisfying $\alpha < u < \beta$.
Then $\mathrm{d}x = g'(u)\,\mathrm{d}u$, and

$$\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(g(u))g'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Remark. If condition (b) above is replaced by the condition that the derivative $g'(u) < 0$ for every u satisfying $\beta < u < \alpha$, then the same conclusion holds if we adopt the convention that

$$\int_\alpha^\beta f(g(u))g'(u)\,\mathrm{d}u = -\int_\beta^\alpha f(g(u))g'(u)\,\mathrm{d}u.$$

EXAMPLE 14.3.11. To calculate the definite integral

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

we can use the substitution $x = \tan u$, so that $\mathrm{d}x = \sec^2 u\,\mathrm{d}u$. Note that $\tan 0 = 0$ and $\tan(\pi/4) = 1$, and that $\sec^2 u > 0$ whenever $0 < u < \pi/4$. It follows that

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 u}{1+\tan^2 u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}u = \Big[u\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

We can compare this to first observing Example 14.2.2, so that

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\tan^{-1} x\Big]_0^1 = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

EXAMPLE 14.3.12. To calculate the definite integral

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x,$$

we can use the substitution $x = g(u) = u^2 - 1$, so that $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$. Note that $g(1) = 0$ and $g(2) = 3$, and that $g'(u) = 2u > 0$ whenever $1 < u < 2$. It follows that

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 2(u^2-1)u^2\,\mathrm{d}u = \left[\frac{2}{5}u^5 - \frac{2}{3}u^3\right]_1^2 = \left(\frac{64}{5} - \frac{16}{3}\right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) = \frac{62}{5} - \frac{14}{3} = \frac{116}{15}.$$

DEFINITE INTEGRAL BY SUBSTITUTION – VERSION 2. *Suppose that a substitution $u = h(x)$ satisfies the following conditions:*
(a) There exists a function $g(u)$ such that $f(x) = g(h(x))h'(x)$ for every $x \in [A, B]$.
(b) The derivative $h'(x) > 0$ for every x satisfying $A < x < B$.
Then $\mathrm{d}u = h'(x)\,\mathrm{d}x$, and

$$\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A^B g(h(x))h'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{h(A)}^{h(B)} g(u)\,\mathrm{d}u.$$

REMARK. If condition (b) above is replaced by the condition that the derivative $h'(x) < 0$ for every x satisfying $A < x < B$, then the same conclusion holds if we adopt the convention that

$$\int_{h(A)}^{h(B)} g(u)\,\mathrm{d}u = -\int_{h(B)}^{h(A)} g(u)\,\mathrm{d}u.$$

EXAMPLE 14.3.13. To calculate the definite integral

$$\int_0^1 x(x^2+3)^4\,\mathrm{d}x,$$

we can use the substitution $u = h(x) = x^2 + 3$, so that $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$. Note that $h(0) = 3$ and $h(1) = 4$, and that $h'(x) = 2x > 0$ whenever $0 < x < 1$. It follows that

$$\int_0^1 x(x^2+3)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_3^4 u^4\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\frac{u^5}{5}\right]_3^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1024}{5} - \frac{243}{5}\right) = \frac{781}{10}.$$

Example 14.3.14. To calculate the definite integral

$$\int_2^4 \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x,$$

we can use the substitution $u = h(x) = \log x$, so that $\mathrm{d}u = h'(x)\,\mathrm{d}x$, where $h'(x) = 1/x > 0$ whenever $2 < x < 4$. Note also that $h(2) = \log 2$ and $h(4) = \log 4$. It follows that

$$\int_2^4 \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x = \int_{\log 2}^{\log 4} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \Big[\log|u|\Big]_{\log 2}^{\log 4} = \log\log 4 - \log\log 2 = \log\left(\frac{\log 4}{\log 2}\right) = \log 2.$$

Example 14.3.15. To calculate the definite integral

$$\int_0^\pi \sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x,$$

we can use the substitution $u = h(x) = \sin x$, so that $\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$. Now $h(0) = 0$ and $h(\pi) = 0$, so something is funny here! The problem is that

$$h'(x) = \cos x \begin{cases} > 0 & \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right), \\ < 0 & \left(\dfrac{\pi}{2} < x < \pi\right). \end{cases}$$

It follows that we must first write

$$\int_0^\pi \sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^\pi \sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

before we can make any substitution. Consider now the first integral on the right hand side of (7). Using the substitution $u = h(x) = \sin x$, we note that $h(0) = 0$ and $h(\pi/2) = 1$, and that $h'(x) > 0$ whenever $0 < x < \pi/2$. Hence

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u^2\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}.$$

Consider next the second integral on the right hand side of (7). Using the substitution $u = h(x) = \sin x$, we note that $h(\pi/2) = 1$ and $h(\pi) = 0$, and that $h'(x) < 0$ whenever $\pi/2 < x < \pi$. Hence

$$\int_{\pi/2}^\pi \sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x = \int_1^0 u^2\,\mathrm{d}u = -\int_0^1 u^2\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{3}.$$

Combining the two parts, we conclude that

$$\int_0^\pi \sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x = 0.$$

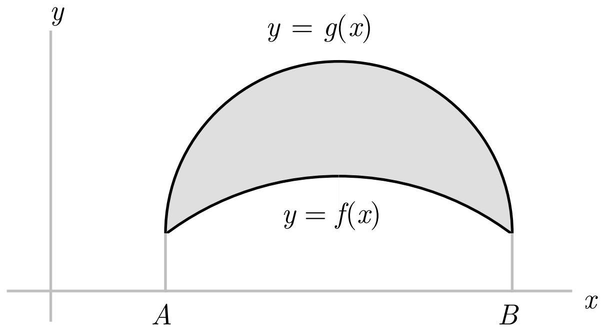
Alternatively, we can make the substitution $x = g(v) = \pi - v$ to the second integral on the right hand side of (7). Then $g(\pi/2) = \pi/2$ and $g(0) = \pi$, and $g'(v) = -1 < 0$ for every v satisfying $0 < v < \pi/2$. It follows that

$$\int_{\pi/2}^\pi \sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^0 \sin^2 v\cos v\,\mathrm{d}v = -\int_0^{\pi/2} \sin^2 v\cos v\,\mathrm{d}v.$$

This, combined with (7), gives the same conclusion.

14.4. Areas

We conclude this chapter by describing how we may use definite integrals to evaluate areas. Suppose that the boundary of a region on the xy-plane can be described by a top edge $y = g(x)$ and a bottom edge $y = f(x)$ bounded between two vertical lines $x = A$ and $x = B$, as shown in the picture below.



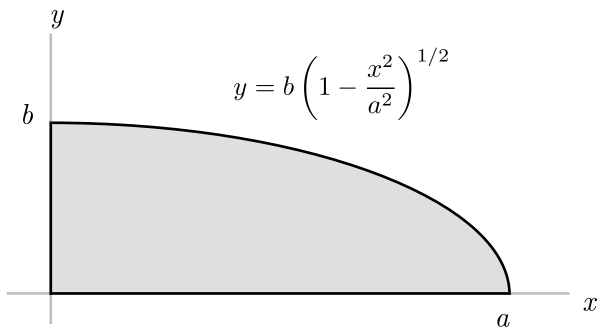
Then the area of the region is given by the definite integral

$$\int_A^B (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.$$

Example 14.4.1. We wish to show that the area of the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

where $a, b \in \mathbb{R}$ are positive, is equal to πab. To do this, we may consider the quarter of the ellipse in the first quadrant, as shown in the picture below.



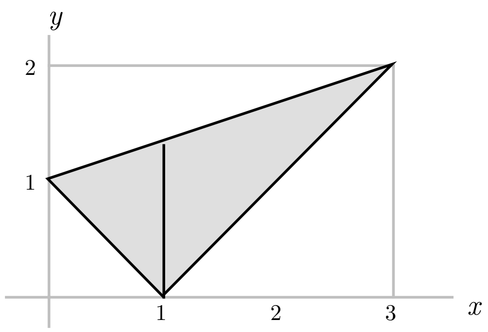
It follows that the shaded region has area

$$\int_0^a b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} \mathrm{d}x.$$

We can use the substitution $x = g(u) = a \sin u$. Then $g(0) = 0$ and $g(\pi/2) = a$. Furthermore, we have $\mathrm{d}x = g'(u)\,\mathrm{d}u$, where $g'(u) = a \cos u > 0$ whenever $0 < u < \pi/2$. It follows that

$$\begin{aligned}\int_0^a b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} \mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} ab(1 - \sin^2 u)^{1/2} \cos u\,\mathrm{d}u = ab\int_0^{\pi/2} \cos^2 u\,\mathrm{d}u \\ &= ab\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2u\right) \mathrm{d}u = ab\left[\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi ab}{4}.\end{aligned}$$

Example 14.4.2. We wish to evaluate the area of the triangle with vertices $(0, 1)$, $(1, 0)$ and $(3, 2)$. To do this, we split the triangle into two regions as shown in the picture below.



The triangle on the left is bounded between the vertical lines $x = 0$ and $x = 1$, and the top edge and the bottom edge are given respectively by

$$y = \frac{1}{3}x + 1 \qquad \text{and} \qquad y = 1 - x.$$

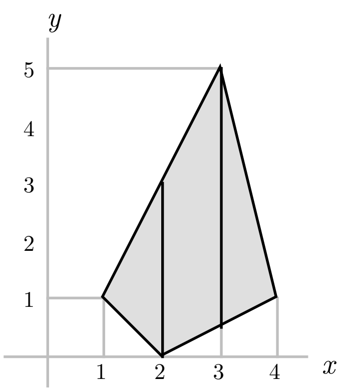
The triangle on the right is bounded between the vertical lines $x = 1$ and $x = 3$, and the top edge and the bottom edge are given respectively by

$$y = \frac{1}{3}x + 1 \qquad \text{and} \qquad y = x - 1.$$

It follows that the area of the original triangle is given by

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\left(\frac{1}{3}x + 1 \right) - (1 - x) \right) \mathrm{d}x + \int_1^3 \left(\left(\frac{1}{3}x + 1 \right) - (x - 1) \right) \mathrm{d}x \\
&\quad = \int_0^1 \frac{4}{3}x \,\mathrm{d}x + \int_1^3 \left(2 - \frac{2}{3}x \right) \mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^2 \right]_0^1 + \left[2x - \frac{1}{3}x^2 \right]_1^3 = 2.
\end{aligned}$$

Example 14.4.3. We wish to evaluate the area of the quadrilateral with vertices $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(4, 1)$ and $(3, 5)$. To do this, we split the quadrilateral into three regions as shown in the picture below.



The triangle on the left is bounded between the vertical lines $x = 1$ and $x = 2$, and the top edge and the bottom edge are given respectively by

$$y = 2x - 1 \qquad \text{and} \qquad y = 2 - x.$$

The quadrilateral in the middle is bounded between the vertical lines $x = 2$ and $x = 3$, and the top edge and the bottom edge are given respectively by

$$y = 2x - 1 \qquad \text{and} \qquad y = \frac{1}{2}x - 1.$$

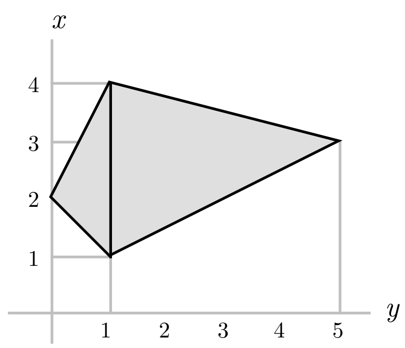
The triangle on the right is bounded between the vertical lines $x = 3$ and $x = 4$, and the top edge and the bottom edge are given respectively by

$$y = 17 - 4x \qquad \text{and} \qquad y = \frac{1}{2}x - 1.$$

It follows that the area of the original quadrilateral is given by

$$\begin{aligned} &\int_1^2 ((2x-1) - (2-x))\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \left((2x-1) - \left(\frac{1}{2}x - 1\right)\right)\,\mathrm{d}x + \int_3^4 \left((17-4x) - \left(\frac{1}{2}x - 1\right)\right)\,\mathrm{d}x \\ &\qquad = \int_1^2 (3x-3)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{3}{2}x\,\mathrm{d}x + \int_3^4 \left(18 - \frac{9}{2}x\right)\,\mathrm{d}x \\ &\qquad = \left[\frac{3}{2}x^2 - 3x\right]_1^2 + \left[\frac{3}{4}x^2\right]_2^3 + \left[18x - \frac{9}{4}x^2\right]_3^4 = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Alternatively, we can transpose the picture above and split the quadrilateral into two regions as shown in the picture below:



Note that the roles of x and y are now interchanged. The triangle on the left is bounded between the vertical lines $y = 0$ and $y = 1$, and the top edge and the bottom edge are given respectively by

$$x = 2y + 2 \qquad \text{and} \qquad x = 2 - y.$$

The triangle on the right is bounded between the vertical lines $y = 1$ and $y = 5$, and the top edge and the bottom edge are given respectively by

$$x = \frac{17}{4} - \frac{1}{4}y \qquad \text{and} \qquad x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}.$$

It follows that the area of the original quadrilateral is given by

$$\begin{aligned} &\int_0^1 ((2y+2) - (2-y))\,\mathrm{d}y + \int_1^5 \left(\left(\frac{17}{4} - \frac{1}{4}y\right) - \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\right)\right)\,\mathrm{d}y \\ &\qquad = \int_0^1 3y\,\mathrm{d}y + \int_1^5 \left(\frac{15}{4} - \frac{3}{4}y\right)\,\mathrm{d}y = \left[\frac{3}{2}y^2\right]_0^1 + \left[\frac{15}{4}y - \frac{3}{8}y^2\right]_1^5 = \frac{15}{2} \end{aligned}$$

as before.

Problems for Chapter 14

1. Find each of the following indefinite integrals:

a) $\int \sqrt{3}\,\mathrm{d}x$ b) $\int (5x+3)\,\mathrm{d}x$ c) $\int (2x^2-3x+1)\,\mathrm{d}x$

d) $\int x^3\,\mathrm{d}x$ e) $\int (x-2)(x+3)\,\mathrm{d}x$ f) $\int (1-2\cos x)\,\mathrm{d}x$

g) $\int (5\cos x+4x)\,\mathrm{d}x$ h) $\int 8\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ i) $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

2. Evaluate each of the following indefinite integrals using the given substitution:

a) $\int x(x^2-1)^{99}\,\mathrm{d}x$ (use the substitution $u=x^2-1$)

b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}}\,\mathrm{d}x$ (use the substitution $u=x^3+2$)

c) $\int \sin 4x\,\mathrm{d}x$ (use the substitution $u=4x$)

d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^2}$ (use the substitution $u=2x+1$)

e) $\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^2}\,\mathrm{d}x$ (use the substitution $u=x^2+6x$)

f) $\int \sec ax\,\tan ax\,\mathrm{d}x$ (use the substitution $u=ax$)

3. Evaluate each of the following indefinite integrals:

a) $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x$ b) $\int \sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$ c) $\int x^2\cos(1-x^3)\,\mathrm{d}x$

d) $\int x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ e) $\int \frac{1}{(1-3x)^4}\,\mathrm{d}x$ f) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$

g) $\int \sec^2(3x)\,\mathrm{d}x$ h) $\int \sin^3 x\cos x\,\mathrm{d}x$ i) $\int x(x^2+16)^2\,\mathrm{d}x$

j) $\int x^2\sqrt{x^3+8}\,\mathrm{d}x$ k) $\int \frac{1}{\sqrt{2x+5}}\,\mathrm{d}x$ l) $\int \left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

m) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}\,\mathrm{d}x$ n) $\int \frac{1}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x$ o) $\int \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x$

p) $\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ q) $\int x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ r) $\int \mathrm{e}^{2x-1}\,\mathrm{d}x$

s) $\int \sec(4x)\tan(4x)\,\mathrm{d}x$ t) $\int x^3\cos(5x^4)\,\mathrm{d}x$ u) $\int \sec^2(2x+1)\,\mathrm{d}x$

v) $\int \mathrm{e}^x\cos(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$ w) $\int \frac{(\log x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$ x) $\int \tan x\sec^3 x\,\mathrm{d}x$

4. Evaluate each of the following definite integrals:

a) $\int_1^2 2x\,\mathrm{d}x$ b) $\int_1^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

d) $\int_2^3 (3x+1)\,\mathrm{d}x$ e) $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$ f) $\int_3^6 (x-3)^2\,\mathrm{d}x$

g) $\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$ h) $\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ i) $\int_0^a (x^2+a^2)\,\mathrm{d}x$

j) $\int_0^1 (1+x+3x^2)\,\mathrm{d}x$ k) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$ l) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x$

5. a) Draw the graphs of the line $y = x$ and the parabola $y = x^2$.
   b) Find the two points of intersection of the two curves.
   c) Use definite integrals to find the area bounded between the two curves.

6. Use definite integrals to find the area between the curves $y = \mathrm{e}^x$ and $y = \mathrm{e}^{2x}$, bounded between the lines $x = 0$ and $x = 1$.

7. Find the area of the triangle with vertices $(0, 0)$, $(4, 3)$ and $(1, 5)$.

8. Find the area of the quadrilateral with vertices $(1, 1)$, $(5, 2)$, $(2, 3)$ and $(4, 3)$.

− ∗ − ∗ − ∗ − ∗ − ∗ −

Antwoorden en uitwerkingen van opgaven

Antwoorden en aanwijzingen van hoofdstuk A

A.1
a. $2^1 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-4}$
b. $\frac{111101}{10000}_{bin}$
c. $\frac{61}{16}$ (idee: als je dit getal met $10000_{bin} = 16_{dec}$ vermenigvuldigt, krijg je $111101_{bin} = 61_{dec}$.)
Als je wilt kun je ook vinden $\frac{38125}{10000}$.

A.2
a. $0.1111\ldots1$ met n cijfers achter de punt.
b. Als je er aan het eind nog een 1 bij optelt, dus als je er $\frac{1}{2^n}$ bij optelt, krijg je 1, dus dat getal is $1 - \frac{1}{2^n}$.

A.3 1.710, 2.710, 3.709, 4.708, 5.709

A.4 0.0110_{bin} , 1.0100_{bin} , 1.0000_{bin} , 0.1111_{bin} , 0.1110_{bin}

A.5
a. $a < 0.123$, $b > 0.124$, $c < -0.124$, $d > -0.123$
b. $a < 0.124$, $b > 0.123$, $c < -0.123$, $d > -0.124$

A.6 Maximale relatieve afwijking ongeveer $\frac{1}{12345} = 8.1 \cdot 10^{-5}$ en $\frac{1}{4444} = 2.3 \cdot 10^{-4}$ in de gegeven getallen. Maximale relatieve afwijking in het product volgens de rekenregel dus $3.1 \cdot 10^{-4}$. Zo'n relatieve afwijking krijg je als je als uitkomst 0.5486118 (met veel meer gesuggereerde nauwkeurigheid dan reëel is) opgeeft en vergelijkt met de maximaal en minimaal mogelijke waarden. Als je 0.549 als uitkomst geeft, dan is de maximale relatieve afwijking echter

$$\frac{0.549 - 1.2344 \cdot 10^1 \cdot 4.443 \cdot 10^{-2}}{0.5486} = 1.0 \cdot 10^{-3}$$

Ongeveer 3 keer zoveel als deze schatting. Dat zit in de afronding, altijd een gevaarlijke bezigheid.

A.7
a. Relatieve nauwkeurigheid in p is $\frac{0.2}{827.3}$, dus ongeveer 0.00025. Relatieve nauwkeurigheid in q is $\frac{0.001}{4.181}$, dus ongeveer 0.0003. Totaal: 0.00055. Dat is dus de relatieve nauwkeurigheid in $p \cdot q$, dus de echte absolute afwijking gedeeld door $p \cdot q$. Nu is $p \cdot q$ ongeveer 3458.94, dus de maximale absolute afwijking is ongeveer $0.00055 \cdot 3458.94$, dus ongeveer 1.9024170. De nauwkeurigheid kun je dus op 2 schatten.
b. Relatieve nauwkeurigheid in q is 0.0003 ongeveer, dus in q^{10} ongeveer $10 \cdot 0.0003 = 0.003$. Om de echte maximale absolute afwijking te schatten moeten we dat getal met q^{10} vermenigvuldigen, dus met ongeveer 1632307. Dat levert een schatting van de onnauwkeurigheid van 4897 op, zeg dus maar ongeveer 5000.

A.8
b. De relatieve onnauwkeurigheid in de uitkomst mag dan dus hoogstens $\dfrac{1}{5.2 \cdot 10^9} \approx 2 \cdot 10^{-10}$ zijn. (Als je wilt: $\dfrac{10^{12}}{5.2 \cdot 10^{21}}$.) Dus de relatieve onnauwkeurigheid in de invoer mag dus hoogstens $\frac{1}{50}$ hiervan zijn, dus $4 \cdot 10^{-12}$. De absolute onnauwkeurigheid is dan dus maximaal $e \cdot 4 \cdot 10^{-12} \approx 1 \cdot 10^{-11}$. Dat betekent dat e in 11 cijfers-achter-de-punt oftewel in (totaal) 12 cijfers nauwkeurig moet zijn.

A.9 $\frac{1.2345 \cdot 10^1}{4.444 \cdot 10^{-2}}$ is minstens $\frac{1.2344 \cdot 10^1}{4.445 \cdot 10^{-2}} = 277.7052868$ en hoogstens $\frac{1.2346 \cdot 10^1}{4.443 \cdot 10^{-2}} = 277.8753095$ Je zou dus zeggen: 277.79 met een maximale afwijking van 0.09, dus een relatieve fout van ongeveer $3.2 \cdot 10^{-4}$. Dat is ook ongeveer de som van de relatieve afwijkingen in de gegeven getallen.

A.10 $36.5 \cdot 0.298 = 10.877$ maar met relatieve nauwkeurigheid $\frac{0.1}{36.5} + \frac{0.001}{0.298} = 0.006$. Voor de aftrekking moeten we weer de absolute nauwkeurigheid hebben: $0.006 * 10.877 \approx 0.067$.
De aftrekking: $10.877 - 9.94 = 0.937$, maar nu is de nauwkeurigheid $0.067 + 0.01 = 0.077$.
Delen levert $\frac{0.937}{0.482} = 1.943983402$, maar dat is absurd nauwkeurig! Voor de deling moeten we weer met relatieve fouten rekenen: $\frac{0.077}{0.937} + 0.0010.482 = 0.085$, maar dat is veel meer dan 1%. Omdat de afwijking voornamelijk in de teller zit en veel minder in de noemer (met een fout van maximaal ongeveer 0.1% gaat het toch goed. De maximale absolute fout is dan dus $0.085 \cdot 1.94 = 0.17$ (naar boven afgerond: veilig. De uitkomst is dus 1.94 ± 0.17, of als je wilt, 2 ± 0.2.

A.11
a. $0.0004 + 0.01 \approx 0.01$
b. $0.04 + 10 \cdot 0.01 = 0.05$
c. Relatieve nauwkeurigheid in x: $\frac{0.0004}{0.1} = 0.004$.
Relatieve nauwkeurigheid in y: $\frac{0.01}{2} = 0.005$.
Relatieve nauwkeurigheid ongeveer in $x \cdot y$: $0.004 + 0.005 = 0.09$.
Nu is $x \cdot y$ ongeveer 0.2, dus de onnauwkeurigheid in $x \cdot y$ is ongeveer $0.2 \cdot 0.09 = 0.018$.
d. Relatieve nauwkeurigheid in $40 + x$: $\frac{0.0004}{40.1} \approx 0.00001$.
Relatieve nauwkeurigheid in $y - 1\frac{1}{2}$: $\frac{0.01}{0.5} = 0.02$.
De relatieve nauwkeurigheid van het product schatten we als $0.00001 + 0.02$, zeg maar 0.02. Verder is het product ongeveer 20, dus de absolute fout is maximaal ongeveer $0.02 \cdot 20 = 0.4$.
e. Net als bij het vermenigvuldigen van x en y is hier de relatieve afwijking maximaal ongeveer 0.09. Dat getal moeten we met $\frac{x}{y}$ vermenigvuldigen, zo krijgen we een schatting van de maximale absolute afwijking: $0.09 \cdot 0.05 = 0.0045$.

A.12 De rekenmachine levert zoiets als 0.546569. Voor de nauwkeurigheid moeten we de maximale absolute afwijkingen in a^3 en in b^2 kennen (want het is een verschil). Maar dat zijn beide machten, dus de nauwkeurigheid daarvan moeten we berekenen via relatieve afwijkingen.

$$\begin{aligned}
\text{maximale relatieve afwijking in } a: &\quad = \frac{0.01}{7.89} \\
\text{maximale relatieve afwijking in } a^3: &\quad = 3 \cdot \frac{0.01}{7.89} \\
\text{maximale absolute afwijking in } a^3: &\quad = 3 \cdot \frac{0.01}{7.89} \cdot 7.98^3 \approx 1.87
\end{aligned}$$

Net zo:

$$\text{maximale absolute afwijking in } b^2: \quad = 2 \cdot \frac{0.01}{22.15} \cdot 22.15^2 \approx 0.45$$

Samen: maximale absolute afwijking: 1.32.
Dat is veel meer dan de gevonden uitkomst. De uitkomst kun je dus beter geven als 0 met een marge van ± 2.

A.13 Maximale relatieve afwijking in b is $\frac{\beta}{b}$, dus maximale relatieve afwijking in b^{10} is $10\frac{\beta}{b}$, dus de maximale absolute afwijking in b^{10} is $10\frac{\beta}{b} \cdot b^{10} = 10 \cdot \beta \cdot b^9$.

A.14 Uitkomst, gewoon met de rekenmachine uitgerekend: -0.04689010574. Maar nu een schatting van de mogelijke afwijking:
$10 \cdot x^5 \approx 0.0488756$. Relatieve fout in x^5: $5 \cdot \frac{0.003}{0.345} \approx 0.043$. We moeten dadelijk van die $10x^5$ wat aftrekken, dus moeten we de absolute fout berekenen. In de $10x^5$ is de relatieve fout hetzelfde als in x^5 (want 10 is exact), dus maximale afwijking in $10x^5$: $0.043 \cdot 0.0488756 \approx 0.0039$.

Volgens de algemene regels tellen we hier de fouten bij elkaar op, hoewel we in dit speciale geval ook zouden kunnen redeneren, dat als x groter wordt, zowel $10x^5$ als x^3 groter worden, dus dat de fouten hier wel van elkaar afgetrokken zouden kunnen worden. Voor het resultaat maakt het hier weinig uit.
Relatieve fout in $x^3 \approx 0.04106 : 3 \cdot \frac{0.003}{0.345} \approx 0.26$, dus absolute absolute fout maximaal ongeveer 0.001. De totale maximale fout in de teller wordt dus 0.004. Dadelijk hebben we voor de deling de maximale relatieve fout in de teller nodig; die is $\frac{0.004}{0.007812} \approx 0.51$. Oei, dat is dus al een maximale afwijking van 50%. We mogen dadelijk de vuistregel voor de berekening van de fout in de breuk niet toepassen.
In de noemer berekenen we net zo eerst de relatieve fout in $200x^4$: $4 \cdot \frac{0.003}{0.00345}$ en die vermenigvuldigen we met $200 \cdot 0.345^4$ om de absolute fout te berekenen i.v.m. het aftrekken van 3. Dat levert 0.098, dus de relatieve fout in de noemer wordt nu $\frac{0.098}{0.1666} \approx 0.59$.
We mogen nu de algemene regels voor deling niet toepassen, want de relatieve fouten zijn veel groter dan 1%. Er zit niets anders op dan echt rekenen: de teller ligt tussen 0.0118 en 0.0038, de noemer tussen -0.068 en -0.264. De breuk ligt dus tussen -0.014 en -0.174. Als je wilt, kun je bijvoorbeeld als uitkomst geven: -0.1 met een nauwkeurigheid van 0.09. In de praktijk zeg je liever: ergens tussen 0 en -0.2.

A.15

a. Beide de helft: maximale afwijking 0.0005.

b. Ook beide de helft: maximale afwijking 0.0005.

c. Nu moeten we met relatieve afwijkingen rekenen. De relatieve afwijking in de uitkomst is ongeveer $\frac{0.001}{200 \cdot 0.5} = 0.000\,01$. Dus de maximale relatieve afwijking is a en in b moet daarvan de helft zijn: $0.000\,005$.
Maximale absolute afwijking in a: $0.000\,005 \cdot 200 = 0.001$.
Maximale absolute afwijking in b: $0.000\,005 \cdot 0.5 = 0.000\,0025$.

d. De uitkomst van de deling is ongeveer $\frac{200}{0.5} = 400$. De De relatieve afwijking in de uitkomst is dus nu ongeveer $\frac{0.001}{400} = 0.000\,0025$. Dus de maximale relatieve afwijking is a en in b moet daarvan de helft zijn: $0.000\,00125$.
Maximale absolute afwijking in a: $0.000\,00125 \cdot 200 = 0.000\,25$.
Maximale absolute afwijking in b: $0.000\,00125 \cdot 0.5 = 0.000\,000\,6$.

e. Afwijking in a maximaal ongeveer $\frac{1}{2} \cdot 0.001 = 0.000\,5$.
Afwijking in b^6 maximaal ongeveer $\frac{1}{2} \cdot 0.001 = 0.000\,5$.
Nu is b^6 ongeveer 0.015, dus de relatieve fout in b^6 is ongeveer 0.032. De relatieve fout in b zelf moet dan maximaal ongeveer $\frac{1}{6}$ hiervan zijn, zeg 0.00533. Door vermenigvuldigen met b krijgen we dat de maximale absolute afwijking in b ongeveer 0.0027 mag zijn.

Antwoorden en aanwijzingen van hoofdstuk B

B.1 Resultaat: 2.1045. Voor de nauwkeurigheid bepalen we de relatieve fout in de factoren en tellen die op: $0.033 + 0.0004 \approx 0.033$. dat levert een absolute maximale fout van 0.07. Het resultaat is dus 2.10 met een maximale fout van 0.07. Volgens de afspraak mag je als uitkomst 2.1 geven, niet 2.10. Commentaar: Dat is dus maar in twee cijfers nauwkeurig! De nauwkeurigheid wordt hier vooral verpest doordat één factor het verschil van twee getallen dicht bij elkaar is.

B.2 Vermenigvuldig met 11_{bin}, dan krijg je (in binaire notatie):

$$0.11, 0.110, 0.1111, 0.11110, 0.111111, \ldots$$

Als we het eerste element met nummer 0 aangeven, dan krijgen we bij nummer $2k$ een getal met $2k+2$ enen achter de punt, dus het verschil met 1 is dan $(\frac{1}{2})^{2k+2}_{dec}$. Bij het $2k$-de en het $2k+1$-de element van de gegeven rij is het verschil met $\frac{1}{3}$ dus $\frac{1}{3}$ dus $\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2})^{2k+2}$. Dat krijg je willekeurig klein als je k maar groot genoeg neemt.

B.3

a. De rij a is zo gemaakt, dat op de n-de plaats een decimaal getal staat met n cijfers achter de punt, zodat dat getal zelf kleiner is dan $\frac{1}{3}$, maar het getal dat je krijgt door het laatste cijfer 1 op te hogen groter is dan $\frac{1}{3}$. Dat is ook gemakkelijk precies te beredeneren met volledige inductie, als je dat zou willen. Dat getal ligt dus minder dan 10^{-n} af van $\frac{1}{3}$. Om minder dan 10^{-12} van $\frac{1}{3}$ af te komen moet je dus bij plaats 12 beginnen:

$$\text{als } k \geq 12 \quad \text{dan} \quad |\frac{1}{3} - a_k| < 10^{-12}$$

b. Redenering als zonet (zie ook de vorige opgave!. Op de k-de plaats in de gegeven rij is het absolute verschil met $\frac{1}{3}$ minder dan 2^{-k-1}. Nu is 10^{-12} net iets meer dan 2^{-40}. Als we dus k minstens 39 nemen, zitten we goed. (Ieder getal groter dan 39 is ook goed, mits netjes beredeneerd.)

$$\text{als } k \geq 39 \quad \text{dan} \quad |\frac{1}{3} - a_k| < 10^{-12}$$

c. Omdat 2^{40} ongeveer $3 \cdot 2.4\%$ meer is dan 10^{12}, is 2^{-40} ongeveer $3 \cdot 2.4\%$ minder dan 10^{-12}. We hebben dus zeker royaal voldaan aan de eis in onderdeel b. Vanaf stap 39 wijken de elementen van rij a minder 10^{-39} af van $\frac{1}{3}$:

$$\text{als } k > 39 \quad \text{dan} \quad |\frac{1}{3} - a_k| < 10^{-39}$$

We kunnen de verschillen tussen de eerste rij en de derde rij schatten door de afwijkingen t.o.v. de tweede rij bij elkaar te tellen volgens de regel voor berekening van afwijkingen in verschillen. Vanaf plaats 39 zit die dus ook nog (royaal) binnen 10^{-39}.

B.4

a. Verschil op plaats n: $\frac{1}{2^n}$. Dat verschil kun je willekeurig klein maken door n voldoende groot te maken. (Als je wilt: je kunt het verschil kleiner maken dan p (als p een positief getal is) door n groter te nemen dan ${}^2\log(\frac{1}{p})$.)

b. Verschil op plaats n: $\frac{1}{10^n}$. Dat verschil kun je willekeurig klein maken door n voldoende groot te maken. (Als je wilt: je kunt het verschil kleiner maken dan p (als p een positief getal is) door n groter te nemen dan ${}^{10}\log(\frac{1}{p})$.)

B.5 Laat de twee rijen $n \mapsto a_n$ en $n \mapsto b_n$ (zwak-stijgende begrensde rijen rationale getallen > 0) de reële getallen a en b representeren. We zeggen dat $a > b$ als

$>$ er een nummer n staat, zodat vanaf plaats n geldt: $a_n > b_n$.

$>$ beide rijen niet equivalent zijn (d.w.z. $a \neq b$).

Antwoorden en aanwijzingen van hoofdstuk C

C.1

a. c^9

b. $= \dfrac{1}{c^4} + c^4$ Als je wilt kun je daar nog van maken: $= \frac{1+c^8}{c^4}$

c. $= \dfrac{y^6 x^{18} y^6 - x^6 x^{12} y^8}{x^{36}(1-y^4)} = \dfrac{x^{18}y^{12} - x^{18}y^8}{x^{36}(1-y^4)} = \dfrac{x^{18}y^8(y^4-1)}{x^{36}(1-y^4)} = -\dfrac{y^8}{x^{18}}.$

d. $t^{\frac{5}{6}} \cdot t^{\frac{2}{3}} = t^{\frac{9}{6}} = t^{\frac{3}{2}}$ en als je wilt: $= t\sqrt{t}$.

C.2
a. $= 20$
b. $= {}^3\log(\sqrt[5]{3^4}) = {}^3\log(3^{\frac{4}{5}}) = \frac{4}{5}$
c. $= {}^3\log((3^2)^{-15}) = {}^3\log(3^{-30}) = -30$
d. $= 0.3$
e. $= (3^4)^{{}^3\log(5)} = 3^{4 \cdot {}^3\log(5)} = 3^{{}^3\log(5^4)} = 3^{{}^3\log(625)} = 625$

C.3 $t = -\frac{4}{7} + \frac{8}{7}\sqrt{2}$

C.4 Eerst vervangen we: ${}^8\log(2) = \frac{1}{3}$. Met de rekenregels voor log krijgen we **op voorwaarde dat alle log-argumenten positief zijn, dus dat** $x + 4 > 0, \quad x + \frac{4}{3} > 0, \quad x + 8 > 0$ **en** $x > 0$**, kortom dat** $x > 0$:

$${}^8\log\left(\frac{x+4}{x+\frac{4}{3}}\right) = {}^8\log\left(\sqrt[3]{(\frac{x+8}{x}}\right)$$

Omdat ${}^8\log$ een injectieve functie is, volgt:

$$\left(\frac{x+4}{x+\frac{4}{3}}\right) = \left(\sqrt[3]{(\frac{x+8}{x}}\right)$$

We gaan dit tot de macht 3 verheffen. Ook dat is een injectieve functie, dus bovenstaande vergelijking is gelijkwaardig met

$$\frac{x+4}{x+\frac{4}{3}})^3 = \frac{x+8}{x}$$

Handig is nu even die breuk weg te werken door teller en noemer met 3 te vermenigvuldigen:

$$\left(\frac{3x+12}{3x+4}\right)^3 = \frac{x+8}{x}$$

We gaan nu de macht uitwerken:

$$\frac{(3x)^3 + 3 \cdot (3x)^2 \cdot 12 + 3 \cdot 3x \cdot (12)^2 + 12^3}{(3x)^3 + 3 \cdot (3x)^2 \cdot 4 + 3 \cdot 3x \cdot 4^2 + 4^3} = \frac{x+8}{x}$$

$$\frac{27x^3 + 324x^2 + 1296x + 1728}{27x^3 + 108x^2 + 144x + 64} = \frac{x+8}{x}$$

Kruislings vermenigvuldigen levert:

$$27x^4 + 324x^3 + 1296x^2 + 1728x = 27x^4 + +324x^3 + 1008x^2 + 1216x + 512$$

Herleiden op 0:

$$288x^2 + 512x - 512 = 0$$

Dit kun je nog delen door 32 en dan wordt het tijd voor de abc-formule. Die levert:

$$x = -\frac{8 \pm \sqrt{208}}{9}$$

Wegens de eis dat $x > 0$ vervalt een oplossing en krijgen we als enige oplossing:

$$x = -\frac{8 + \sqrt{208}}{9}$$

C.5
a. $x = \sqrt{7} = 2.64575$
b. $a = 9$

C.6

$$2\log(x-1) + {}^2\log(8) = {}^2\log(3x+1)$$

Pas op, nu niet overal log wegstrepen, we moeten eerst naar "log(...)=log(...)":

$${}^2\log((x-1)\cdot 8) = {}^2\log(3x+1)$$

Nu kunnen we gebruiken: ${}^a\log(b) = {}^a\log(c) \Leftrightarrow b = c$ mits $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$.

$$(x-1)\cdot 8 = 3x+1 \quad \text{mits} \quad x-1>0 \quad \text{en} \quad 3x+1>0$$

Uitwerken van de vergelijking en testen op de bovengenoemde mitsen levert

$$x = \frac{9}{5}$$

Antwoorden en aanwijzingen van hoofdstuk D

D.1 Laat die vijfhoek ABCDE zijn. Kijk in driehoek ABC. Hoek B is $\frac{3}{5}\pi$ radialen; dat kun je bijvoorbeeld berekenen door het middelpunt M van die regelmatige 5-hoek te nemen (dus in feite het middelpunt van de omgeschreven cirkel), dan is hoek AMB gelijk aan $\frac{2}{5}\pi$ radialen, enz. De beide andere hoeken van de driehoek zijn gelijk aan $\frac{1}{5}\pi$ radialen. Trek nu de hoogtelijn vanuit B op AC (loodrecht erop dus), dan is dus de helft van AC gelijk aan $10\cos(\frac{1}{5}\pi) = 8.090$.

D.2 $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$, dus $(\sin(x))^2 = \frac{5}{9}$.

Uit het feit dat $\cos(x)$ positief is, lees je af dat er een $k \in Z$ is zodat $-\frac{1}{2}\pi < x + 2k\pi < \frac{1}{2}\pi$. Uit het gegeven volgt dus dat $-3\frac{1}{2}\pi < x < 4\pi$. Dus $\sin(x) < 0$.

Dus $\sin(x) = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{1}{3}\sqrt{5}$.

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$

D.3

a. Kijk naar de eenheidscirkel (of de grafiek van sinus): $-\frac{1}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in Z$.

b. $-\frac{2}{3}\pi + 2k \subset< x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in Z$.

c. $\frac{1}{4}\pi + k\pi < x < \frac{1}{2}\pi + k\pi$, $k \in Z$.

D.4

a. $x = 5 + 2k\pi$ of $x = \pi - 5 + 2k\pi$ met $k \in Z$

b. $2x - 1 = 2 - x + 2k\pi$ of $2x - 1 = \pi - (2 - x) + 2k\pi$, dus $x = 1 + \frac{2}{3}k\pi$ of $x = \pi - 1 + 2k\pi$ met $k \in Z$.

c. $x = 5 + 2k\pi$ of $x = -5 + 2k\pi$ met $k \in Z$

d. $\cos(5) = \sin(\frac{1}{2}\pi - 5)$ dus $x = \frac{1}{2}\pi - 5 + 2k\pi$ of $x = \frac{1}{2}\pi + 5 + 2k\pi$ met $k \in Z$.

e. $x = 5 + k\pi$ met $k \in Z$

D.5 Zie de vergelijking eerst als $6c^2 + 5c - 4 = 0$. Dat levert: $\cos(x) = -1$ of $\cos(x) = \frac{2}{3}$. Dat levert als mogelijkheden: $x = \pi + 2k\pi$ of $x = 0.841 + 2k\pi$ of $x = -0.841 + 2k\pi$.

D.6 $2\cdot 3\cdot 7\cdot\cos(\alpha) = 3^2 + 7^2 - 5^2$, dus $\cos(\alpha) = \frac{33}{42}$, dus $\alpha = 0.667$.

$2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos(\beta) = 3^2 + 5^2 - 7^2$, dus $\cos(\beta) = -\frac{15}{30}$, dus $\beta = \frac{2}{3}\pi = 2.09$.

$\gamma = \pi - \alpha - \beta = 0.380$. (Let op: gebruik hier niet de eerder genoemde afgeronde uitkomsten, maar rond pas aan het eind af.)

D.7

a. $-\frac{1}{8}\pi < x < \frac{1}{16}\pi + k\pi$, met $k \in Z$

b. $\frac{2}{3}\pi + 4k\pi < x < \frac{4}{3}\pi + 4k\pi$, met $k \in Z$

D.8

a. $x = \frac{2}{9}k\pi$ of $x = \frac{1}{11}\pi + \frac{2}{11}k\pi$, met $k \in Z$

b. Eerst sinus in cosinus omzetten: $\sin(x-2) = \cos(\frac{1}{2}\pi - (x-2)$ en dan de regel toepassen $\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow a = b + 2k\pi$ of $a = -b + 2k\pi$. Dat levert $x = \frac{5}{2} + \frac{1}{4}\pi + k\pi$, met $k \in Z$

c. Omzetten via tan=sin/cos in $\frac{\sin(x-1)(1-2\cos(x-1))}{\cos(x-1)} = 0$, dus $\sin(x-1) = 0$ of $\cos(x-1) = \frac{1}{2}$. Resultaat: $x = 1 + k\pi$ of $x = 1 + \frac{1}{3}\pi + 2k\pi$ of $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, met $k \in Z$.

Antwoorden en aanwijzingen van hoofdstuk E

E.1

a. $\arctan(3) \approx 1.249$

b. $-\arctan(3) \approx -1.249$

c. $\pi - \arctan(3) \approx 1.893$

d. $\arctan(3) - \pi \approx -1.893$

E.2 Pas op: je mag *niet vereenvoudigen* tot $(1+i)^{5\cdot\frac{2}{3}} = (1+i)^{\frac{10}{3}}$!

Argument van $1+i$ is $\frac{1}{4}\pi$, dus argument van $(1+i)^5$ is $\frac{5}{4}\pi - 2\pi = -\frac{3}{4}\pi$ (correctie om tussen $-\pi$ en π uit te komen!)

Als we dat weer tot de macht $\frac{2}{3}$ verheffen komen we uit bij argument $-\frac{2}{4}\pi = -\frac{1}{2}\pi$.

Voor de absolute waarde gaat het gemakkelijk: eerst tot de macht 5 en dan tot de macht $\frac{2}{3}$, dus totaal tot de macht $\frac{10}{3}$.

Resultaat:

$$(\sqrt{2})^{10/3}\left(\cos(-\frac{1}{2}\pi) + i\sin(-\frac{1}{2}\pi)\right) \approx 2.245 - 2.245i$$

E.3

a. $e^{-3}(\cos(4) + i\sin(4)) \approx -0.03254 - 0.03768i$

b. $\ln(\sqrt{3+4^2}) + (\pi - \arctan(\frac{4}{3}))i \approx 1.609 + 2.214i$

Antwoorden en aanwijzingen van hoofdstuk F

F.1 $\sqrt{3} \approx 1.1\ldots7_{bin}$

$(\sqrt{3} - 1) \times 2^7 \approx 1\ldots7_{bin}$

$93.7_{dec} \approx 1\ldots7_{bin}$

$94_{dec} = 1011110_{bin}$

dus $\sqrt{3} \approx 1.1011110_{bin}$

F.2

a. Exponent 127_{dec}, gecodeerd als $254_{dec} = 11111110_{bin}$, significant $1.11\ldots1_{bin}$, dus bijna 2, samen:

$$2^{128} - 2^{124}$$

Omgekeerde: afgerond 2^{-128}, te klein om weer te geven, dus dit levert 0 op.

b. Exponent -126, significant $1.000\ldots0$. Omgekeerde is 2^{126}, gerepresenteerd als: sign bit 0, exponent code $253_{dec} = 11111101_{bin}$, significant $1.000\ldots0$, gecodeerd als een rij 0-en.

F.4

a. Bij single precision loopt de relatieve afwijking tussen $2-24$ en 2^{-25}. Om veilig te zitten moet de maximale relatieve fout voor decimaal (5×10^{-p}) kleiner zijn dan die $2^{-25} \approx 3 \times 10^{-8}$. We moeten daarom $p = 9$ nemen, dus decimaal met 9 cijfers rekenen.

b. Net zo: 17 cijfers.

c. Nu moeten we zorgen dat de maximale fout in binair kleiner is dan de minimale fout in decimaal: $2^{-24} < 5 \times 10^{-p-1}$, dus $6 \times 10^{-8} < 5 \times 10^{-p-1}$. Neem $-p - 1 = -7$, dus $p = 6$. (Omdat het zo weinig scheelt, zul je in de praktijk vrijwel altijd ook met decimaal 7 cijfers goed uitkomen, maar deze groffe berekening geeft daarvoor geen garantie.)

F.5

a. Exactly rounded: 0.0001 levert 0.000, met guard digit net zo 0.000 (foutloos), kappen: 0.001 (fout 0.001).

b. Exactly rounded: 0.111111, afgerond 1.000, met guard digit 0.1111, ook afgerond op 1.000 (foutloos), kappen: 0.111 (fout 0.001)

c. Exactly rounded: 0.110101, afgerond op 0.1101, met guard digit 0.111 (fout 0.001) en met kappen idem.

d. Exactly rounded: 0.110011, afgerond op 0.1101, met guard digit 0.1101 (foutloos), met kappen 0.1111 (fout 0.0010!)

Antwoorden en aanwijzingen van bij Ian Craw: Intro Calculus and Analysis Chapter G1

G1.1

a. $-5 < x < 5$

b. $-2 < x < 3$

c. $x < 2\frac{1}{2}$ of $x > 3$

d. $2 < x < 8$

e. $x < 1$

f. $x < -4$

g. Alle waarden van x voldoen: $x \in R$.

h. $x < -\sqrt{6}$ of $x > \sqrt{6}$

i. $x > \frac{1}{32}$

j. $-\frac{1}{2}\pi + k\pi < x < -\frac{1}{4}\pi + k\pi$ of $\frac{1}{4}\pi + k\pi < x < -\frac{1}{2}\pi + k\pi$

k. $\frac{1}{3}\pi + k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + k\pi$, $k \in Z$

l. $x < -4$

G1.2

a. Los eerst op: $\tan(y) < 1$. Zie grafiek van tan: $-\frac{1}{2}\pi < y + k\pi < \frac{1}{4}\pi$ Dus $-\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4} < x + \frac{1}{4}k\pi < \frac{1}{16}\pi$.

b. $(\frac{1}{3})^{4x} < (\frac{1}{3})^{-2}$ dus $4x > -2$, dus $x > -\frac{1}{2}$

c. Eis: $25 - x^2 \geq 0$, dus eis $-5 \leq x \leq 5$. Beide kanten zijn positief of 0, we kunnen dus straffeloos kwadrateren: $25 - x^2 < 9$. Dit levert $x > 4$ of $x < -4$. Samen: $-5 \leq x < -4$ of $4 < x \leq 5$.

d. Eis: $2 - x^2 \neq 0$. Als $2 - x^2 < 0$ dan is de linkerkant negatief, dus dat gaat niet goed. We beperken ons dus bij voorbaat tot $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. Daarvoor is $2 - x^2$ hoogstens 2, dus is $\frac{1}{2-x^2} \geq \frac{1}{2} > \frac{1}{2}5$, dus dan is automatisch voldaan aan de ongelijkheid. Conclusie: $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

$$1 = \frac{1}{25}(2 - x^2)$$

e. Eis: $2-x^2 \neq 0$. Als $2-x^2<0$ dan is de linkerkant negatief, dus dan is het zeker niet goed. Als $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$, dan kunnen we links en rechts daarmee vermenigvuldigen; dat levert $1 \geq 50-25x^2$ dus $25x^2>49$, dus $x<-\frac{5}{7}$ of $x>\frac{5}{7}$. Oplossing: $-\sqrt{(}2)<x\leq-\frac{5}{7}$ of $\frac{5}{7}\leq x<\sqrt{2}$.

Antwoorden en aanwijzingen van bij Ian Craw: Intro Calculus and Analysis Chapter G2

G2.2

a. Bij gegeven M: neem $N>\sqrt[3]{M}$. Als $n\geq N$, dan (wegens $x\mapsto x^3$ stijgend): $n^3\geq N^3>(\sqrt[3]{M})^3=M$.

b. Bij gegeven M: neem $N>M^3$. Als $n\geq N$, dan (wegens $x\mapsto x^{\frac{1}{3}}$ stijgend): $n^{\frac{1}{3}}\geq N^{\frac{1}{3}}>(M^3)^{\frac{1}{3}}=M$.

c. Bij gegeven $\epsilon>$: neem $N>\sqrt[3]{\frac{1}{\epsilon}}$. Als $n\geq N$, dan (wegens $x\mapsto x^{-3}$ dalend): $n^{-3}\leq N^{-3}<(\sqrt[3]{\frac{1}{\epsilon}})^3=\epsilon$.

d. Bij gegeven $\epsilon>$: neem $N>\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^3$. Als $n\geq N$, dan (wegens $x\mapsto x^{-\frac{1}{3}}$ dalend): $n^{-\frac{1}{3}}\leq N^{-\frac{1}{3}}<\left(\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^3\right)^{\frac{-1}{1}\frac{1}{3}}=\epsilon$.

e. $n^{-3}<n^a<n^{-\frac{1}{3}}$. Gebruik nu de beide vorige resultaten en het squeezing lemma.

G2.3 Let G be a “large” number. We should find a natural number N such that $b_k>G$ for all k with $k\geq N$. Now $a_n\to\infty$ as $n\to\infty$, so, by definition, for each number G exists a natural number N such that $a_k>G$ for all k with $k\geq N$. As $b_n>a_n$, this number N suffices the previous demand.

G2.4

a. Vermenigvuldig het linkerdeel met $\frac{n+1}{n+1}$ en het rechterdeel met $\frac{n-1}{n-1}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n+1}-\frac{n^2}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n-1}\right)$$

Werk dit verder uit:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+2n^2+n}{(n+1)(n-1)}-\frac{n^3-n^2}{(n+1)(n-1)}\right)$$

Samennemen:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+n}{n^2-1}\right)$$

Teller en noemer door n^2 delen:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n^2}}\right)$$

Dit gaat naar 3 als $n\to\infty$.

b. Gebruik de rekeneigenschappen van log, dat levert:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\log\left(\frac{n^2+n}{n-1}\right)}{\frac{1}{2}\log\left(\frac{n^2}{n+1}\right)}$$

Gebruik nu dat delen door een breuk vermenigvuldigen met het omgekeerde is en deel teller en noemer door een geschikte macht van n. Dan zie je dat het argument van de log naar 1 gaat, dus de log zelf naar 0.

G2.5 Gebruik het squeezing lemma:

$$0<\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}<$$
$$<\frac{1}{n}\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{n}$$

Omdat $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ en $0 < \frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n}$ krijgen we voor de gevraagde limiet 0.

G2.6

a. True. Let ϵ be some ("small") positive number. We should find a number N such that $|\frac{1}{a_k}| < \epsilon$ if $k \geq N$. Now $a_n \to \infty$ as $n \to \infty$, so, by definition, for each number G exists a natural number N such that $a_k > G$ for all k with $k \geq N$. Let's do this for $G := \frac{1}{\epsilon}$. Then $a_k > \frac{1}{\epsilon} > 0$, so $0 < \frac{1}{a_k} < \epsilon$, so $|\frac{1}{a_k}| < \epsilon$, if $k \geq N$.

b. Not true: counterexample: $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$.

G2.7

a. Onwaar: zie volgend onderdeel.

b.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + n - 2n^2 - 2 - n^3 + n - 2n^2 + 2}{n^2 - 4} = -4$$

c. Niet waar: neem $a_n = \frac{1}{n}$ en $b_n = \frac{2}{n}$. Reken zelf maar na.

Antwoorden en aanwijzingen van bij Ian Craw: Intro Calculus and Analysis Chapter G4

G4.1

a. De uitkomst is ongeveer $93\,648$, dus in 8 cijfers nauwkeurig betekent een absolute fout van minder dan 0.001, relatief is dat ongeveer 10^{-8}. Bij machtsverheffen tot de macht n wordt de relatieve fout n keer zo groot (ongeveer, voor vrij kleine relatieve fouten), dus moet de relatieve afwijking in de benadering van π kleiner zijn dan 10^{-9}. Absoluut gezien betekent dat: een afwijking kleiner dan $3 \cdot 10^{-9}$. Als je wilt aangeven in hoeveel cijfers nauwkeurig je dan π moet nemen: een nauwkeurigheid van 9 cijfers volstaat achter de punt volstaat blijkbaar. Dat betekent in feite een nauwkeurigheid van 10 cijfers (omdat er ook nog een cijfer vóór de punt staat).

b. Net als bovenstaande: maximale relatieve afwijking is ongeveer $\frac{\epsilon}{10^5}$ (Let op: dit is goed afgerond: we nemen een net iets strengere eis doordat $10^5 > \pi^{10}$.) Dus de relatieve afwijking van de benadering van π moet kleiner zijn dan $\frac{\epsilon}{10^6}$. De absolute afwijking moet dan kleiner zijn dan $3 \cdot \frac{\epsilon}{10^6}$. (Let op: ook hier weer goed afgerond doordat $3 < \pi$, dus is de eis net nog iets strenger.)

G4.2

a. 1

b. Bestaat niet: links gaat hij naar ∞, rechts naar 0.

c. $\lim_{x\to-3} \frac{x}{(x+3)^2} = -infty$, dus de gevraagde limiet is 0.

d. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x+3)^2} = 1$, dus de gevraagde limiet is $e^1 = e$.

e. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x+3)^2} = 0$, dus de gevraagde limiet is $e^0 = 1$.

f. Net zo: uitkomst 1

Antwoorden en aanwijzingen van bij Ian Craw: Intro Calculus and Analysis Chapter G5

G5.2 $f'(x) = \dfrac{2000x^8 - 150x^4 + 200x^6 + 9}{(200x^4 - 3)^2}$ We vullen hier $x = 0.345$ in, dat levert $f'(0.345) \approx -11.3538$. De afwijking kun je dus schatten als $-11.3538 \cdot 0.003 \approx -0.034$.

G5.3 Voor het differentiëren moeten we die macht nog omzetten in een e-macht:

$$f(x) = \exp(x \cdot (\ln(1 - \frac{1}{x}))$$

Dat levert:

$$f'(x) = (\ln(1 - \frac{1}{x}) + \frac{x}{1 - \frac{1}{x}}) \exp(x \cdot \ln(1 - \frac{1}{x}))$$

Dat ziet er nog steeds niet leuk uit, maar de e-macht is in ieder geval positief en de linker factor is duidelijk positief als x groot is, want dan is die logaritme ongeveer 0 en de breuk ongeveer x. Voor $x = 2$ is die linker factor ook al meer dan 3.3. Als we nu maar kunnen zien dat

$$x \mapsto \ln(1 - \frac{1}{x}) + \frac{x}{1 - \frac{1}{x}}$$

stijgend is, zijn we binnen! En dat gaat nu gemakkelijk met dezelfde truc:

$$g(x) = \ln(1 - \frac{1}{x}) + \frac{x}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} + \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 3x}{(x-1)^2}$$

De teller is $x(2x - 3)$ en die is zeker positief als $x > 2$, de noemer is ook positief voor $x > 2$, dus inderdaad: g is stijgend op $[2, \infty >$ en $g(2) > 0$, dus $g(x) > 0$ voor $x \geq 2$. Daarmee is $f'(x) > 0$ voor $x > 2$ en omdat $f(2) = \frac{1}{4}$ zien we dat $\frac{1}{-}\frac{1}{x})^x \geq \frac{1}{4}$ voor $x > 2$.

Antwoorden en aanwijzingen van bij Ian Craw: Intro Calculus and Analysis Chapter G3

G3.1 This sequence yields $1, -1, 0, 1, -1, 0, \ldots$. It is a periodic sequence and has not a limit.

G3.2
a. Calculating a first part of the sequence yields in decimal approximations:

$$\begin{aligned} &1, \quad 4.5, \quad -0.27, \quad 17.6, \quad -2.2, \quad -15.6, \quad -4.0, \quad -7.95, \\ &-5.16, \quad -6.60, \quad -5.67, \quad -6.20, \quad -5.88, \quad -6.07, \\ &-5.96, \quad -6.03, \quad -5.98, \quad -6.01, \quad \ldots \end{aligned}$$

This suggests that eventually the elements oscillate around and approximate to a limit near to -6. The odd elements of the sequence are

$$1, -0.27, \quad -2.2, \quad -4.0, \quad -5.16, \quad -5.67, \quad -5.88, \quad -5.96, \quad -5.98, \quad \ldots$$

This suggests that the odd elements are a decreasing sequence.

$$a_{2n+1} = f(a_2 n) = f(f(a_{2n-1})) = (f \circ f)(a_{2n-1)}$$

We will calculate the derivative of $f \circ f$ with the chain rule:

$$(f \circ f)'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x))$$

$$f'(x) = -\frac{15}{(1+x)^2}$$

So

$$(f \circ f)'(x) = -\frac{15}{(1+x)^2} \cdot -\frac{15}{(1+f(x))^2}$$

This is positive where $x \neq -1$. So $f \circ f$ is increasing on both parts of its domain, $< -\infty, -1 >$ and $< -1, \infty >$. Now the first elements of the odd subsequence are in the second part of this domain, but from a_5 all elements seem to be in $< -\infty, -1 >$. The hypothesis for mathematical induction will be, that for $n \geq 3$:

$$a_{2n+1} < a_{2n-1} < -1$$

The proof is given by

- We have already seen that $a_7 < a_5 < -1$.
- $a_{2n+3} = (f \circ f)(a_{2n+1})$ and $a_{2n+1} = (f \circ f)(a_{2n2-1})$, so if $a_{2n+1} < a_{2n-1}$, then $a_{2n+3} < a_{2n+1}$. Moreover $a_2 n + 1 < -1$ by the induction hypothesis (saying that $a_{2n+1} < a_{2n-1} < -1$), so

  $$a_{2n+3} < a_{2n+1} < -1$$

Now let's calculate the fixed points for $f \circ f$:

$$f(f(x)) = x$$

$$\frac{12 - 3 \cdot \frac{12-3x}{1+x}}{1 + \frac{12-3x}{1+x}} = x$$

$$\frac{24 - 21x}{-13 + 2x} = x$$

Solution: $x = 2$ or $x = -6$. Now we look for an under bound. We have seen that $a_{2n+1} < -1$ for $n \geq 2$. Moreover $a_{2n+1} > -6$ for $n \geq 2$; thisd can be proven with induction:

- $a_5 > -6$
- Induction hypothesis: $a_{2n-1} > -6$. Then $f \circ f(a_{2n-1}) > f \circ f(-6)$, so $a_{2n+1} > -6$.

So the odd elements of the sequence are a descending bounded sequence, so it has a limit L. Now

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = L$$

$$\lim_{n\to\infty} f \circ f(a_{2n-1}) = f \circ f(L)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$$

So $f \circ f(L) = L$, so $L = 2$ or $L = -6$, but eventually $-6 < a_{2n+1} < -1$, so $L = -6$. In the same way we can handle the even elements of the sequence:

- prove that eventually $-18 < a_{2n} < -6$
- prove that the sequence $n \mapsto a_{2n}$ is increasing

So this sequence has a limit as well, and again it can only be -6. Now arguing that the sequence itself has limit -6 is simple.

b. The sequence starts as

$$a_1 = -5, \quad a_2 = -6.75, \quad a_3 \approx -5.6087, \quad a_4 = -6.2547, \quad a_5 \approx -5.8546, \quad a_6 \approx -6.0899$$

In the same way as in the previous part one can proof that $a_1, a_3, a_5, \ldots$ is an ascending sequence with limit -6 and that $a_1, a_3, a_5, \ldots$ is a descending sequence with limit -6. That proofs that a has limit -6.

G3.3

a. We gaan maar eens kijken of de rij (op den duur) stijgend of dalend is en begrensd. Daartoe gaan we kijken naar de functie

$$f: \quad x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{1 - \frac{1}{2}\ln(x)}{x\sqrt{x}}$$

We moeten hiervan het tekenverloop bepalen. Omdat ln een stijgende functie is en $1 - \frac{1}{2}\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^2$ krijgen we dat de teller negatief is voor $x > e^2$ en positief voor $0 < x < e^2$. Daarmeen zien we dat de functie f stijgend is links van e^2 en rechts daarvan dalend. Dus de rij is zeker dalend vanaf nummer $3^2 = 9$. Verder zijn teller en noemer voor $x > 1$ positief, dus de rij bevat vanaf nummer 2 alleen positieve elementen. Het is dus een dalende rij, naar onder begrensd (door 0) en heeft dus een limiet.

b. Als je even wat rekent krijg je het vermoeden dat de limiet wel 0 zal zijn. Dat gaan we bewijzen. Een voor de hand liggend idee is: gebruik het Squeezing Lemma. We zoeken dus een geschikte rij die naar 0 gaat en (op den duur) boven de gegeven rij ligt. Omdat ln een erg traag stijgende functie is, kun je gokken op een rij van type $k \mapsto \frac{1}{k^a}$ waarbij a kleiner is dan $\frac{1}{2}$, maar natuurlijk wel groter dan 0. Laten we maar eens $a = \frac{1}{3}$ nemen. We hopen dus dat 'op den duur'

$$\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

Dit kunnen we vereenvoudigen tot

$$\ln(x) - x^{\frac{1}{6}} < 0$$

Dat is dus nu een ongelijkheid die we weer kunnen proberen aan te pakken met differentiëren:

$$g: \quad x \mapsto \ln(x) - x^{\frac{1}{6}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{6}x^{-5/6}$$

We lossen nu maar op:

$$?x: \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{6}x^{-5/6} >< 0$$

$$x > 6\sqrt[6]{x^5}$$

$$x^6 > 6^6 x^5$$

$$x > 6^6$$

Dus op $[6^6, \infty >$ is g dalend, dus als we nu maar een getal $x > 6^6$ kunnen vinden zodat $g(x) < 0$, dan krijgen we rechts van dat getal nog kleinere, dus zeker negatieve waarden. Neem maar eens $x = (e^2)^6 = e^{12}$. Dan

$$g(e^{12}) = 12 - e^2 > 0 \quad \text{helaas!}$$

$$g(e^{24}) = 24 - e^4 \approx -30 \quad \text{hoera!}$$

Dus blijkbaar geldt voor alle $k > e^{24}$ dat

$$0 < \frac{\ln(k)}{\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$$

Omdat $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = 0$ geldt nu ook volgens het squeezing lemma dat de gegeven rij limiet 0 heeft.

Antwoorden en aanwijzingen van bij Ian Craw: Intro Calculus and Analysis Chapter G6

G6.2

a. Met 6.21:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{4^k}{k^4}}{\frac{4^{k+1}}{(k+1)^4}} = \frac{1}{4}\left(\frac{k+1}{k}\right)^4$$

De limiet hiervan is natuurlijk $\frac{1}{4}$. Dat is kleiner dan 1 dus de reeks is convergent.

b. Gebruik stelling (G6.2) op bldz. 552: alle termen zijn positief en

$$\sqrt[k]{a_k} = \sum i = 1^k 2^{-i-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}$$

De limiet hiervan is $\frac{1}{2}$ en dat is kleiner dan 1, dus de reeks is convergent.

c. Voor grote k is de k-de term

$$\frac{1}{\sqrt{k(k^2-1)}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{k^2-1} \approx \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$$

Dat levert het vermoeden dat we kunnen bewijzen dat deze rij convergent is door te vergelijken met de reeks $\sum_k \frac{1}{k^{3/2}}$; die laatste is convergent omdat $\frac{3}{2} > 1$. Maar helaas

$$\frac{1}{\sqrt{k(k^2-1)}} > \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$$

Dat is echter gemakkelijk op te vangen: het scheelt 'procentueel' maar weinig. Dat kan bijvoorbeeld zo:
Als $k = 2$, dan $k^3 - k = 6$, terwijk $k^3 = 8$. We vermoeden nu dat

$$k^3 - k > \frac{1}{2}k^3 \quad \text{voor k¿2}$$

Dat klopt: $\frac{1}{2}k^3 - k = k(\frac{1}{2}k^2 - 1) > 0$ voor $k > 2$. Dus

$$\frac{1}{\sqrt{k^3-k}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}k^3}} = \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{k^3}}$$

Omdat $\sum_{k=2} \frac{1}{k^3}$ convergeert, convergeert ook $\sum_{k=2} \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{k^3}}$ en wegens de bewezen ongelijkheid volgt dat de gegeven reeks convergeert.

d. Hier werkt stelling (G6.2) op bldz. 552 niet, want $\sqrt[k]{a_k}$ heeft limiet 1! Ook 6.21 werkt niet: ook de limiet van quotiënten van opvolgende termen is 1.
In deze barre omstandigheden is het goed om eens te gaan rekenen. Je krijgt dan snel het vermoeden dan alle termen minstens 0.25 zijn, dus dat

$$(1 - \frac{1}{k})^k \geq 0.25 \quad \text{voor alle natuurlijke } k \text{ met } k \geq 2$$

Als dat inderdaad zo is, is de reeks divergent, want de limiet van de bijbehorende rij is niet 0. Om die ongelijkheid te gaan bewijzen, is het handig te generaliseren naar de ongelijkheid

$$(1 - \frac{1}{x})^x \geq 0.25$$

waar $x \in R$ en $x \geq 2$. We gaan kijken naar stijgen en dalen van de functie

$$f: \quad x \mapsto (1 - \frac{1}{x})^x$$

Dat hebben we al gedaan in opgave G5.3 op bldz. 542. Daar hebben we gevonden dat $f'(x) > 0$ voor $x > 2$, dus dat f stijgend is rechts van 2. Omdat $f(2) = \frac{1}{4}$ volgt hieruit voor de gegeven rij dat alle termen van de reeks minstens $\frac{1}{4}$

zijn. De termen gaan dus niet naar 0 en dus is de reeks niet sommeerbaar.

Antwoorden en aanwijzingen van bij Ian Craw: Intro Calculus and Analysis Chapter G7

G7.1 We berekenen eerst

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\dfrac{3(n+1)^2}{(n+1)^3-(n+1)^2+1}\,x^{n+1}}{\dfrac{3n^2}{n^3-n^2+1}\,x^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3(n+1)^2}{3n^2}\cdot\frac{n^3-n^2+1}{(n+1)^3-n+1^2+1}\cdot x\right)=x$$

We krijgen convergentie voor $|x|<1$ en divergentie voor $|x|>1$, dus de divergentiestraal is 1.

G7.2 We berekenen

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2^{k+1}+1}x^{k+1}}{\sqrt{2^k+1}x^k}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2^{k+1}}{2^k+1}}\cdot x=\sqrt{2}\cdot x$$

We krijgen convergentie voor $|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ en divergentie voor $|x|>\frac{1}{\sqrt{2}}$, dus de divergentiestraal is $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Antwoorden en aanwijzingen van bij W.W.L.Cheng and X.T.Duong: Introduction to Integration G14

Trefwoorden