

Hertentamen Calculus/analyse

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. De opgaven tellen even zwaar. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen, antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Het gebruik van een rekenmachine is alleen maar voor de uitwerking van numerieke resultaten (zo als $\sqrt{2}$ of 0.3^{42}) toegestaan, niet voor het bepalen van afgeleiden of nulpunten van functies.

Opgave 1. (10 punten)

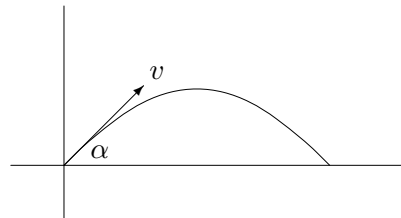
Zij $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ een differentieerbare functie met $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ en $f(2) = 0$.

- (i) Laat zien dat er een waarde c in het interval $(0, 2)$ bestaat met $f'(c) = 1$.
- (ii) Laat zich zelfs aantonen dat voor de waarde c uit deel (i) geldt dat $c \leq 1$? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(Hint: Denk aan de middelwaardestelling en de tussenwaardestelling.)

Opgave 2. (12 punten)

Een kogel wordt vanaf de grond met een hoek van α tegen de grond en de snelheid v afgevuurd. Op tijdstip t na het afvuren is de hoogte van de kogel boven de grond $y(t) = -16t^2 + v \sin(\alpha)t$ en de horizontale afstand van het startpunt is $x(t) = v \cos(\alpha)t$.



- (i) Na welke tijd t komt de kogel terug naar de grond?
- (ii) Bepaal de hoek α zo dat de kogel de grootst mogelijke afstand van het startpunt bereikt. Wat is de maximaal bereikbare afstand?
- (iii) Voor welke hoek α is de tijd die de kogel vliegt maximaal? Hoe groot is deze tijd?

Opgave 3. (16 punten)

Omdat $1^3 = 1$ geldt, ligt het punt $P = (1, 1)$ op de grafiek van de functie $f(x) = x^3$.

- (i) Bepaal de raaklijn $l(x)$ aan de grafiek van $f(x)$ in het punt P .
- (ii) Laat zien dat de raaklijn $l(x)$ uit deel (i) de grafiek van $f(x)$ in een verder punt Q snijdt. Bepaal dit punt Q !
- (iii) Bereken de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van $f(x)$ en de lijn $l(x)$ (tussen Q en P).
- (iv) Hoe groot is het stuk van het gebied uit deel (iii) dat boven de x -as ligt?

Opgave 4. (12 punten)

Bepaal primitieven van de volgende functies:

- (i) $f(x) := x \cdot \sin(1 + x^2)$;
- (ii) $f(x) := (\ln(x) + 1) \ln(x)$;
- (iii) $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x - x^2}}$.

$f(x)$	$f'(x)$
x^c	$c \cdot x^{c-1}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$x \ln(x) - x$	$\ln(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Succes ermee!