

Huiswerk week 2

Opgave 5.

Bewijs de volgende formules voor de goniometrische functies:

- (i) $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$, $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$;
- (ii) $\sin(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$, $\cos(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$ (het teken hangt af van de grootte van $\frac{x}{2}$).

Hint: Denk onder meer aan de Formule van Euler: $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.

Opgave 6.

Bewijs of weerleg!

- (i) Als a_n niet convergeert en b_n niet convergeert, dan convergeert ook $a_n + b_n$ niet.
- (ii) Als a_n convergeert en $a_n + b_n$ convergeert, dan convergeert ook b_n .
- (iii) Als a_n convergeert maar b_n niet convergeert, dan convergeert ook $a_n + b_n$ niet.
- (iv) Als a_n convergeert en $a_n \cdot b_n$ convergeert, dan convergeert ook b_n .

Opgave 7.

Een rij a_n heet een *Cauchy rij* als er voor ieder $\varepsilon > 0$ een natuurlijk getal N bestaat zo dat $|a_n - a_m| < \varepsilon$ voor alle $n, m \geq N$.

- (i) Laat zien dat een convergente rij ook een Cauchy rij is.
- (ii) Laat zien dat een Cauchy rij begrensd is.

Opmerking: In feite geldt ook dat iedere Cauchy rij convergent is, maar het bewijs daarvan vergt iets meer moeite.

Opgave 8.

Bewijs de volgende limieten:

- (i) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \Rightarrow a_n \rightarrow \frac{1}{2}$;
- (ii) $a_n = \sqrt[n]{n} \Rightarrow a_n \rightarrow 1$;
Hint: Zij $b_n = a_n - 1$. Gebruik $(1 + b_n)^n = n$ en het *binomial theorem* (p.8 bij Craw) om aan te tonen dat $b_n \rightarrow 0$.
- (iii) Zij $\pi(n)$ het aantal verschillende priemgetallen die n delen. Laat zien dat $a_n = \frac{\pi(n)}{n} \rightarrow 0$.