

Huiswerk week 3

Opgave 9.

Bewijs de volgende *vaste punt stelling*: Als $f(x) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continu is, dan heeft $f(x)$ een vast punt, d.w.z. er bestaat een $c \in [0, 1]$ met $f(c) = c$.

Hint: Gebruik de tussenwaardestelling.

Opgave 10.

- (i) Ga na waar de volgende functie $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu is:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{als } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{als } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ (in laagste termen)} \end{cases}$$

- (ii) Bedenk een functie $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die nergens continu is, maar waarvoor $|f(x)|$ overal continu is.

Opgave 11.

Bepaal de volgende afgeleiden:

- | | |
|--|---|
| (i) $f(x) := x^x$; | (ii) $f(x) := \exp(-x^2)$; |
| (iii) $f(x) := (((x^2 + x)^3 + x)^4 + x)^5$; | (iv) $f(x) := \ln\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\right)$; |
| (v) $f(x) := \sin(x + \sin(x))$; | (vi) $f(x) := \sin\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)$; |
| (vii) $f(x) := \sin(6 \cos(6 \sin(6 \cos(6x))))$; | (viii) $f(x) := 5^{\cos(x)}$; |
| (ix) $f(x) := \sin(\sin(\sin(\sin(\sin(x)))))$; | (x) $f(x) := \sin((\sin^7(x^7) + 1)^7)$. |

Opgave 12.

Bepaal voor de volgende functies de Taylor veelterm van graad 4 in $x_0 = 0$:

- (i) $f(x) := \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$;
- (ii) $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$;
- (iii) $f(x) := \sin(2x^2)$;
- (iv) $f(x) := e^{-3x}$;
- (v) $f(x) := (1+x)^a$ met $a \in \mathbb{R}$.

Webpagina: <http://www.math.ru.nl/~souvi/calcanalyse/calcanalyse.html>