

Proeftentamen met uitwerkingen

Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen, antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Het gebruik van een rekenmachine is alleen maar voor de uitwerking van numerieke resultaten (zo als $\sqrt{2}$ of 0.3^{42}) toegestaan, niet voor het bepalen van afgeleiden of nulpunten van functies.

Opgave 1.

Zij $f_m(x) = x^3 - 3x + m$. Laat zien dat $f_m(x)$ onafhankelijk van de waarde van m nooit twee nulpunten in het interval $[0, 1]$ heeft.

(Hint: Gebruik de stelling van Rolle of denk over minima en maxima na. Het is ook een goed plan om naar de functie $f_0(x)$ te kijken en erover na te denken waar de functie $f_m(x)$ in verhouding hiermee ligt.)

Oplossing. Eerste mogelijkheid: Als $f_m(x)$ twee nulpunten $a < b$ op het interval $[0, 1]$ heeft, dan is $f_m(a) = f_m(b) = 0$. Volgens de stelling van Rolle ligt dan tussen a en b een punt c met $f'_m(c) = 0$. Maar $f'_m(x) = 3x^2 - 3$ en de nulpunten hiervan zijn -1 en 1 , dus kan er zo'n c niet bestaan.

Tweede mogelijkheid: Aan de hand van de afgeleide $f'_m(x) = 3x^2 - 3$ zien we ook, dat $f_m(x)$ op het interval $[0, 1]$ dalend is, want $f'_m(x) < 0$ voor $x \in [0, 1]$ en $f'_m(1) = 0$. In het bijzonder heeft $f_m(x)$ in $x = 1$ een minimum en in $x = -1$ een maximum, en tussen deze twee punten kan slechts een nulpunt van $f_m(x)$ liggen.

Opgave 2.

Een ellips wordt beschreven door de vergelijking $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. De parameters a en b geven de lengten van de twee halfassen van de ellips. Voor $a = b = 1$ is de ellips een cirkel. We bekijken rechthoeken met zijden evenwijdig aan de x - en y -assen, die in de ellips liggen. Bepaal de afmetingen van de rechthoeken:

- (i) met maximale oppervlakte,
- (ii) met maximale omtrek,

die in de ellips passen.

Oplossing. Door de vergelijking van de ellips naar y op te lossen, kunnen we de bovenhelft van de ellips door de functie $f(x) = y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ beschrijven.

- (i) De oppervlakte van de rechthoek met hoekpunt (x, y) is $4xy$. Door y door $f(x)$ te vervangen, vinden we de functie $O(x) = 4x \cdot b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = 4b\sqrt{x^2 - \frac{x^4}{a^2}}$, waarvan we een maximum moeten bepalen.

Er geldt $O'(x) = 4b \frac{2x - \frac{4x^3}{a^2}}{2\sqrt{x^2 - \frac{x^4}{a^2}}}$ en dus $O'(x) = 0$ als $2x = \frac{4x^3}{a^2}$, dus als $2x^2 = a^2$.

We vinden dus de maximale oppervlakte voor $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Hieruit volgt dan $y = b\sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}}$.

- (ii) De omtrek van de rechthoek met hoekpunt (x, y) is $2(x + y)$. Door y door $f(x)$ te vervangen, vinden we de functie $O(x) = 2(x + b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}})$ waarvan we een maximum moeten bepalen.

Er geldt $O'(x) = 2(1 - \frac{\frac{b}{a^2}x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}})$ en dus $O'(x) = 0$ als $\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a^2}x$, dus als $1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^4}x^2$, dus als $1 = \frac{a^2 + b^2}{a^4}x^2$. We vinden dus de maximale omtrek voor $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Hieruit volgt dan $y = b\sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2}} = b\sqrt{\frac{b^2}{a^2 + b^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Opgave 3.

We bekijken de functie

$$f(x) := -\ln(x).$$

- (i) De functie $f(x)$ sluit met de positieve x - en y -assen een (naar boven onbegrensd) gebied in.

Bepaal de (qua oppervlakte) grootste rechthoek die in dit gebied past. Wat zijn de afmetingen van dit rechthoek, wat is zijn oppervlak?

- (ii) De (gewone Euclidische) afstand die een punt (x, y) in het vlak van de oorsprong $(0, 0)$ heeft is $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Laat zien: Het punt $(x, f(x))$ op de grafiek van $f(x)$ dat de kleinste afstand van de oorsprong heeft, voldoet aan $x^2 = -\ln(x)$.

(De precieze x -waarde 0.65291864... van dit punt laat zich alleen maar door een numerieke benadering bepalen.)

Oplossing.

- (i) Natuurlijk moet het punt rechts boven van de rechthoek op de grafiek van $f(x)$ liggen, dus van de vorm $(x, -\ln(x))$ zijn. De oppervlakte van de rechthoek is dan $O(x) = -x \ln(x)$ en dit moeten we maximaliseren.

Er geldt $O'(x) = -\ln(x) - 1$ en $O'(x) = 0$ voor $\ln(x) = -1$, dus voor $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$. De grootste rechthoek heeft dus breedte $\frac{1}{e}$, hoogte 1 en dus oppervlak $\frac{1}{e}$.

- (ii) De afstand die een punt $(x, f(x))$ van de oorsprong heeft is gelijk aan $A(x) = \sqrt{x^2 + \ln(x)^2}$. Omdat $x \mapsto x^2$ een monotoon stijgende functie is, is $A(x)$ minimaal op hetzelfde punt als $A(x)^2$, dus kunnen we ook kijken waar $B(x) = A(x)^2 = x^2 + \ln(x)^2$ minimaal wordt. Er geldt $B'(x) = 2x + 2\ln(x)\frac{1}{x}$ en dus $B'(x) = 0$ voor $2x = -2\frac{\ln(x)}{x}$, dus voor $x^2 = -\ln(x)$.

Opgave 4.

Bepaal primitieven van de volgende functies:

- (i) $f(x) := \sin(x) \cdot \cos(x)$;
(ii) $f(x) := \ln(x^2 + x + 1)$;
(iii) $f(x) := \frac{a^x}{b^x}$ voor $a, b > 0$;
(iv) $f(x) := (a\sqrt{x} + x^2) \cdot (\frac{1}{\sqrt{bx}} + \frac{1}{x^3})$ voor constanten a en b .

Oplossing.

- (i) $F(x) = \frac{1}{2} \sin(x)^2$;
(ii) $F(x) = x \ln(x^2 + x + 1) - 2x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \sqrt{3} \arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})$;
(iii) $F(x) = \frac{1}{\ln(\frac{a}{b})} (\frac{a}{b})^x$;
(iv) $F(x) = \frac{a}{\sqrt{b}}x - \frac{2a}{3} \frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{2}{5\sqrt{b}} \sqrt{x^5} + \ln(x)$.

$f(x)$	$f'(x)$
x^c	$c \cdot x^{c-1}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$x \ln(x) - x$	$\ln(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Succes ermee!