

Tentamen Calculus/analyse

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. De opgaven tellen even zwaar. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen, antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Het gebruik van een rekenmachine is alleen maar voor de uitwerking van numerieke resultaten (zo als $\sqrt{2}$ of 0.3^{42}) toegestaan, niet voor het bepalen van afgeleiden of nulpunten van functies.

Opgave 1. (10 punten)

Zij $f(x)$ een continue functie op het interval $[0, 1]$ met $f(0) = 1$ en $f(1) = 0$.

Laat zien dat $f(x)$ op het interval $[0, 1]$ iedere waarde tussen 0 en 1 aanneemt, d.w.z. dat er voor iedere $y \in [0, 1]$ een $c \in [0, 1]$ bestaat met $f(c) = y$.

Opgave 2. (15 punten)

Zij $f(x) := \exp(-|x|) = e^{-|x|}$ een functie met domein $\mathbb{R}$.

(Deze functie speelt als *Laplace-verdeling* een belangrijke rol in de kanstheorie.)

- (i) Ga na of $f(x)$ nulpunten, lokale minima of lokale maxima heeft en geef deze aan als ze bestaan. Maak ook een schets van de functie.
- (ii) Is $f(x)$ in $x = 0$ differentieerbaar? Geef uitleg over je antwoord.
- (iii) Geef de vergelijking $h(x) = ax + b$ van een lijn aan, die de grafiek van $f(x)$ in precies één punt raakt, maar niet door het punt $(0, 1)$ loopt.
- (iv) Bepaal de (qua oppervlakte) grootste rechthoek die tussen de grafiek van $f(x)$ en de x -as past. Geef de breedte, hoogte en oppervlakte van deze rechthoek aan.

Opgave 3. (13 punten)

Zij $f(x) := x^2 - 3x$ en $g(x) := -x^2 + 5x$.

- (i) Bepaal de parameters a en b voor de lijn $h(x) = ax + b$ die door de twee snijpunten van $f(x)$ en $g(x)$ loopt.
- (ii) Bepaal de grootte van het gebied dat door de grafieken van $f(x)$ en $g(x)$ ingesloten wordt.
- (iii) De lijn $h(x)$ uit deel (i) deelt het gebied tussen de grafieken van $f(x)$ en $g(x)$ in twee stukken. Bepaal de grootten van deze twee deeloppervlakten.

Opgave 4. (12 punten)

Bepaal primitieven van de volgende functies:

(i) $f(x) := x \cdot \sqrt{1 - x^2};$

(ii) $f(x) := (\sin(x) + x)(\cos(x) - x);$

(iii) $f(x) := \frac{\sqrt{x}}{x + 1}.$

$f(x)$	$f'(x)$
x^c	$c \cdot x^{c-1}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$x \ln(x) - x$	$\ln(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Succes ermee!