

## Uitwerkingen huiswerk week 1

### Opgave 1.

We hebben de regels bekeken, dat bij het optellen/aftrekken van onnauwkeurig bekende waarden de *absolute fouten* bij elkaar worden opgeteld en bij het vermenigvuldigen/delen de *relatieve fouten*. Hierbij zijn we echter ervan uit gegaan dat de fout duidelijk kleiner is dan de waarde zelf.

Stel dat  $a = 1235 \pm 1$  en  $b = 1233 \pm 1$ .

- (i) Bereken de fout van  $a^2 - b^2$  volgens de regels door eerst de fouten van  $a^2$  en  $b^2$  te bepalen en dan die van het verschil.
- (ii) Bereken de fout van  $(a - b)(a + b)$  volgens de regels door eerst de fouten van  $a - b$  en  $a + b$  te bepalen en dan die van het product.
- (iii) Bereken de minimale en maximale waarde die  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  volgens de gegeven grenzen kan hebben.

Geef commentaar op je resultaten.

### Oplossing.

- (i) De relatieve fout van  $a^2$  is  $2\frac{1}{a} \approx 1.6 \cdot 10^{-3}$ . De absolute fout  $a^2$  is dus  $2\frac{1}{a} \cdot a^2 = 2a = 2470$ . Net zo is de absolute fout van  $b^2$  gelijk aan  $2b = 2466$ . De fout van het verschil  $a^2 - b^2$  is dus  $2470 + 2466 = 4936$ . Voor de gegeven waarden van  $a$  en  $b$  is  $a^2 - b^2 = 4936$ , dus hebben we als resultaat  $4936 \pm 4936$ .
- (ii) De absolute fouten van  $a - b$  en  $a + b$  zijn telkens 2, de relatieve fout van het product is dus  $\frac{2}{a-b} + \frac{2}{a+b}$  en de absolute fout van het product is  $(\frac{2}{a-b} + \frac{2}{a+b})(a - b)(a + b) = 2(a + b) + 2(a - b) = 4a = 4940$ .
- (iii) De grootste waarde heeft  $a^2 - b^2$  als  $a$  maximaal en  $b$  minimaal is, dus voor  $a = 1236$  en  $b = 1232$ . De waarde is dan 9872. Omgekeerd krijgen we de kleinste waarde voor  $a = 1234$  en  $b = 1234$ , dan is natuurlijk  $a^2 - b^2 = 0$ .

We zien dus dat de regels de mogelijke afwijking inderdaad realistisch weergeven. De afwijking in (ii) berust op het feit dat de fout van  $a - b$  tegenover  $a - b$  niet klein is (en we daarom het product van twee  $\Delta$ -termen eigenlijk niet mogen weglaten). Het voorbeeld laat in ieder geval zien, dat ook relatief kleine afwijkingen tot resultaten kunnen leiden, die een vraag zo als  $a^2 - b^2 > 0$ ? moeilijk laten worden.

### Opgave 2.

Mijn bijna historische rekenmachine geeft voor  $\pi$  een waarde van 3.141592654 aan waarbij ik ervan uit mag gaan dat het laatste cijfer afgerond is. Voor  $\pi^{200}$  vind ik de waarde  $2.6913771 \cdot 10^{99}$ .

Bepaal hoe nauwkeurig dit resultaat zijn kan en geef aan of het aantal cijfers van het resultaat wel verantwoord is.

**Oplossing.** We gaan ervan uit dat de fout door afronden in het laatste gegeven cijfer tot stand komt, dan is die af te schatten door  $0.5 \cdot 10^{-9}$ . De relatieve fout van  $\pi$  is dan  $\frac{0.5 \cdot 10^{-9}}{\pi} = \frac{10^{-9}}{2\pi}$ . De relatieve fout van  $\pi^{200}$  is dan  $200 \cdot \frac{10^{-9}}{2\pi} = \frac{10^{-7}}{\pi} \approx 3.2 \cdot 10^{-8}$  en de absolute fout is  $\frac{10^{-7}}{\pi} \cdot \pi^{200} = \pi^{199} \cdot 10^{-7} \approx 8.6 \cdot 10^{91} = 0.86 \cdot 10^{92}$ . Het laatste gegeven cijfer van het resultaat (dat met  $1 \cdot 10^{92}$  correspondeert) is dus onzeker, en zou ook 0 of 2 kunnen zijn. De gegeven nauwkeurigheid is dus bijna verantwoord, het laatste cijfer kan niet als afgerond van het juiste resultaat verondersteld worden, maar kan toch niet meer dan 1 van het juiste resultaat afwijken. Dit klopt inderdaad, want de goede waarde is  $2.691377013 \dots \cdot 10^{99}$ .

### Opgave 3.

Schrijf de volgende complexe getallen in de vorm  $a + i \cdot b$  en in poolcoördinaten:

$$(i) (1 - i\sqrt{3})^2 \quad (ii) \frac{1+i}{i-1} \quad (iii) \frac{3+4i}{2-i}$$

Hoe kan men absolute waarde en argument van deze getallen bepalen, zonder de getallen eerst in de vorm  $a + i \cdot b$  te brengen?

**Oplossing.**

$$(i) z = (1 - i\sqrt{3})^2 = -2 - i \cdot 2\sqrt{3}.$$

De poolcoördinaten zijn  $r = |z| = 4$  en  $\varphi = \arg(z) = \arctan(\frac{2\sqrt{3}}{2}) - 180^\circ = -120^\circ$ .

We moeten hier bij het bepalen van het argument opletten, want voor  $z = a + ib$  geldt alleen maar in het geval  $a > 0$  dat  $\arg(z) = \arctan(\frac{b}{a})$ . Het probleem is dat  $\arctan(\frac{b}{a}) = \arctan(\frac{-b}{-a})$ , maar dat  $\arg(-z) = \arg(z) \pm 180^\circ$ . We moeten dus voor  $a < 0$  op de arcustangens  $180^\circ$  optellen of ervan aftrekken.

$$(ii) z = \frac{1+i}{i-1} = \frac{(1+i)(-i-1)}{(i-1)(-i-1)} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

De poolcoördinaten zijn  $r = |z| = 1$  en  $\varphi = \arg(z) = -90^\circ$ .

$$(iii) z = \frac{3+4i}{2-i} = \frac{(3+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+11i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i.$$

De poolcoördinaten zijn  $r = |z| = \sqrt{\frac{125}{25}} = \sqrt{5}$  en  $\varphi = \arg(z) = \arctan(\frac{11}{2}) \approx 79.695^\circ$ .

De absolute waarde van een product is het product van de absolute waarden der factoren, de absolute waarde van een quotiënt is het quotiënt van de absolute waarden van teller en noemer.

Het argument van een product is de som van de argumenten der factoren, het argument van een quotiënt is het verschil van de argumenten van teller en noemer.

$$(i) \quad |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow |(1 - i\sqrt{3})^2| = 2 \cdot 2 = 4.$$

$$\arg(1 - i\sqrt{3}) = \arctan(-\sqrt{3}) = -60^\circ \Rightarrow \arg((1 - i\sqrt{3})^2) = 2 \cdot (-60^\circ) = -120^\circ.$$

$$(ii) \quad |1 + i| = |i - 1| = \sqrt{2} \Rightarrow \left| \frac{1+i}{i-1} \right| = 1.$$

$$\arg(1 + i) = 45^\circ, \arg(i - 1) = 135^\circ \Rightarrow \arg\left(\frac{1+i}{i-1}\right) = 90^\circ.$$

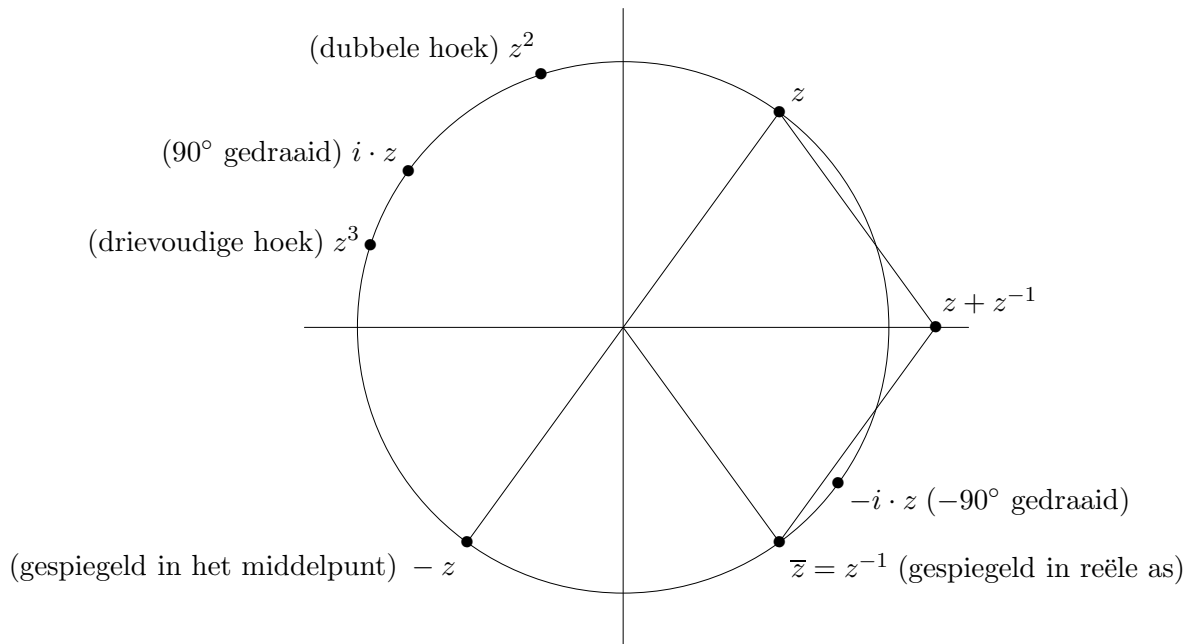
$$(iii) \quad |3 + 4i| = 5, |2 - i| = \sqrt{5} \Rightarrow \left| \frac{3+4i}{2-i} \right| = \sqrt{5}.$$

$$\arg(3 + 4i) = 2 \arg(2 + i) = -2 \arg(2 - i) \Rightarrow \arg\left(\frac{3+4i}{2-i}\right) = -3 \arg(2 - i) \approx 79.695^\circ.$$

#### Opgave 4.

Teken een punt  $z \in \mathbb{C}$  op de eenheidscirkel (d.w.z. met  $|z| = 1$ ) die een voldoende algemene positie heeft (dus niet  $\pm 1, \pm i$ ). Construeer de punten  $z^2, z^3, z^{-1}, -z, \bar{z}, i \cdot z, -i \cdot z$ . Ga in de figuur na dat  $z + z^{-1}$  reëel is.

#### Oplossing.



De lijn door  $z$  en  $-z$  staat loodrecht op de lijn door  $i \cdot z$  en  $-i \cdot z$ .

Webpagina: <http://www.math.ru.nl/~souvi/calcanalyse/calcanalyse.html>