

Uitwerkingen huiswerk week 2

Opgave 5.

Bewijs de volgende formules voor de goniometrische functies:

- (i) $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$, $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$;
 (ii) $\sin(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$, $\cos(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$ (het teken hangt af van de grootte van $\frac{x}{2}$).

Hint: Denk onder meer aan de Formule van Euler: $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.

Oplossing.

- (i) De Formule van Euler geeft

$$\cos(3x) + i\sin(3x) = e^{3ix} = (e^{ix})^3 = (\cos(x) + i\sin(x))^3.$$

Uitwerken van de 3-de macht geeft

$$\cos(3x) + i\sin(3x) = \cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x).$$

Vervangen van $\cos^2(x)$ door $1 - \sin^2(x)$ en van $\sin^2(x)$ door $1 - \cos^2(x)$ en opsplitsen in reëel en imaginair deel geeft

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos^3(x) - 3\cos(x)(1 - \cos^2(x)) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \text{ en} \\ \sin(3x) &= -\sin^3(x) + 3(1 - \sin^2(x))\sin(x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x).\end{aligned}$$

- (ii) Tijdens het college hebben we gezien dat $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ en met $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ krijgen we $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ en dus

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)).$$

Vervangen van x door $\frac{x}{2}$ en worteltrekken geeft het resultaat. Voor $-\pi \leq x \leq \pi$ moet $\cos(\frac{x}{2})$ positief zijn, voor $\pi < x < 3\pi$ negatief (en verder periodiek met periode 4π).

Voor $\sin(\frac{x}{2})$ werkt het analoog: $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = (1 - \sin^2(x)) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$, dus is

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)).$$

Vervangen van x door $\frac{x}{2}$ en worteltrekken geeft weer het resultaat. Voor $0 \leq x \leq 2\pi$ moet $\sin(\frac{x}{2})$ positief zijn, voor $2\pi < x < 4\pi$ negatief (en verder periodiek met periode 4π).

Opgave 6.

Bewijs of weerleg!

- (i) Als a_n niet convergeert en b_n niet convergeert, dan convergeert ook $a_n + b_n$ niet.
- (ii) Als a_n convergeert en $a_n + b_n$ convergeert, dan convergeert ook b_n .
- (iii) Als a_n convergeert maar b_n niet convergeert, dan convergeert ook $a_n + b_n$ niet.
- (iv) Als a_n convergeert en $a_n \cdot b_n$ convergeert, dan convergeert ook b_n .

Oplossing.

- (i) Klopt niet! Stel dat $a_n = n$ en $b_n = -n$, dan is $a_n + b_n = 0$ voor alle n en dus i.h.b. convergent.
- (ii) Klopt! Volgens de stelling over sommen (en verschillen) van convergente rijen is b_n convergent, want $b_n = (a_n + b_n) - a_n$ en de twee rijen aan de rechterkant zijn convergent.
- (iii) Klopt! Stel dat $a_n + b_n$ wel convergeert. Dan moet volgens (ii) ook b_n convergeren, maar dat is volgens de voorwaarde niet zo.
- (iv) Klopt niet! Stel dat $a_n = \frac{1}{n^2}$ en $b_n = n$. Dan is $a_n \cdot b_n = \frac{1}{n}$ convergent, maar b_n is niet convergent.

Opgave 7.

Een rij a_n heet een *Cauchy rij* als er voor ieder $\varepsilon > 0$ een natuurlijk getal N bestaat zo dat $|a_n - a_m| < \varepsilon$ voor alle $n, m \geq N$.

- (i) Laat zien dat een convergente rij ook een Cauchy rij is.
- (ii) Laat zien dat een Cauchy rij begrensd is.

Opmerking: In feite geldt ook dat iedere Cauchy rij convergent is, maar het bewijs daarvan vergt iets meer moeite.

Oplossing.

- (i) We noteren de limiet van a_n met l . Zij $\varepsilon > 0$. Omdat a_n convergent is, bestaat er een natuurlijk getal N zo dat $|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ voor alle $n \geq N$. Maar dan geldt voor $n, m \geq N$:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - l) - (a_m - l)| \leq |a_n - l| + |a_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

- (ii) Zij $\varepsilon = 1$. Dan bestaat er een natuurlijk getal N zo dat $|a_n - a_m| < 1$ voor alle $n, m \geq N$. In het bijzonder is dan $|a_n - a_N| < 1$ voor alle $n \geq N$ en dus $a_n < a_N + 1$ voor alle $n \geq N$. De rij is dus begrensd door het maximum van $a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$ en $a_N + 1$.

Opgave 8.

Bewijs de volgende limieten:

- (i) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \Rightarrow a_n \rightarrow \frac{1}{2}$;
- (ii) $a_n = \sqrt[n]{n} \Rightarrow a_n \rightarrow 1$;
Hint: Zij $b_n = a_n - 1$. Gebruik $(1 + b_n)^n = n$ en het *binomial theorem* (p.8 bij Craw) om aan te tonen dat $b_n \rightarrow 0$.
- (iii) Zij $\pi(n)$ het aantal verschillende priemgetallen die n delen. Laat zien dat $a_n = \frac{\pi(n)}{n} \rightarrow 0$.

Oplossing.

- (i) Aan de ene kant is

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \sqrt{n^2 + n} - n \\ &< \sqrt{n^2 + n + \frac{1}{4}} - n = \sqrt{(n + \frac{1}{2})^2} - n = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Aan de andere kant hebben we

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \\ &> \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{1}{2n})^2} + 1} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2n}}\end{aligned}$$

Nu kunnen we het inschakelingslemma toepassen op

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{2n}} < a_n < \frac{1}{2}$$

en zien rechtstreeks dat $a_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

- (ii) Zij $b_n = a_n - 1$. Om aan te tonen dat $a_n \rightarrow 1$ moeten we laten zien dat $b_n \rightarrow 0$. Omdat $a_n > 1$ voor alle n is $b_n > 0$ voor alle n . Volgens het *binomial theorem* geldt nu

$$n = a_n^n = (1 + b_n)^n = 1 + nb_n + \frac{n(n-1)}{2}b_n^2 + \dots + b_n^n = n.$$

Omdat alle termen positief zijn, kan ieder van de termen apart hoogstens $n-1$ zijn (vanwege de eerste 1), dus i.h.b. $\frac{n(n-1)}{2}b_n^2 \leq n-1$. Hieruit volgt $b_n^2 \leq \frac{2}{n}$ en dus $b_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$. Voor $N > \frac{2}{\varepsilon^2}$ en $n \geq N$ is dus $b_n < \varepsilon$.

- (iii) Laten $p_1, \dots, p_{\pi(n)}$ de verschillende priemdelers van n zijn, dan heeft n een ontbinding in priemdelers van de vorm

$$n = \prod_{i=1}^{\pi(n)} p_i^{a_i}, \quad a_i \geq 1.$$

We kunnen nu n heel grof naar beneden afschatten door eerst iedere a_i door 1 te vervangen en vervolgens iedere priemdelers p_i door 2 (het kleinste priemgetal): $n \geq \prod_{i=1}^{\pi(n)} p_i \geq 2^{\pi(n)}$. Hieruit volgt dat $\pi(n) \leq {}^2\log(n)$.

We moeten nu nog laten zien dat ${}^2\log(n)$ zo langzaam groeit, dat geldt: $\frac{{}^2\log(n)}{n} \rightarrow 0$. Een mogelijkheid is, aan te tonen dat ${}^2\log(n) < \sqrt{n}$ (vanaf een zekere n).

We zien makkelijk in dat $n^2 < 2^n$ voor $n \geq 5$: Zij $b_n = n^2$ en $c_n = 2^n$. Dan is $\frac{c_{n+1}}{c_n} = 2$ en $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = (1 + \frac{1}{n})^2$. Voor $n \geq 3$ is dus $\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq (\frac{4}{3})^2 < 2$ en dus volgt voor $n \geq 3$ uit $b_n < c_n$ dat $b_{n+1} < c_{n+1}$. Maar $b_5 = 25 < 32 = c_5$, dus is inderdaad $n^2 < 2^n$ voor $n \geq 5$.

Door nu n door $\sqrt{n}$ te vervangen, zien we dat $n < 2^{\sqrt{n}}$ voor $n \geq 25$. Maar dit betekent dat ${}^2\log(n) < \sqrt{n}$ voor $n \geq 25$.

We kunnen nu het inschakelingslemma toepassen: Er geldt

$$0 \leq a_n \leq \frac{{}^2\log(n)}{n} < \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

en natuurlijk geldt $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$, want voor $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$ is $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$.

Webpagina: <http://www.math.ru.nl/~souvi/calcanalyse/calcanalyse.html>