

Uitwerkingen huiswerk week 3

Opgave 9.

Bewijs de volgende *vaste punt stelling*: Als $f(x) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continu is, dan heeft $f(x)$ een vast punt, d.w.z. er bestaat een $c \in [0, 1]$ met $f(c) = c$.

Hint: Gebruik de tussenwaardestelling.

Oplossing. Als $f(0) = 0$ of $f(1) = 1$ zijn we klaar. Als dit niet het geval is, geldt $f(0) > 0$ en $f(1) < 1$, want de waarden van $f(x)$ liggen in het interval $[0, 1]$.

Bekijk nu de functie $g(x) := f(x) - x$. Er geldt $g(0) = f(0) > 0$ en $g(1) = f(1) - 1 < 0$, dus heeft $g(x)$ volgens de tussenwaardestelling op het interval $[0, 1]$ een nulpunt, dus een c met $g(c) = 0$. Maar voor deze c is $0 = g(c) = f(c) - c$ en dus $f(c) = c$.

Opgave 10.

- (i) Ga na waar de volgende functie $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu is:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{als } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{als } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ (in laagste termen)} \end{cases}$$

- (ii) Bedenk een functie $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die nergens continu is, maar waarvoor $|f(x)|$ overal continu is.

Oplossing.

- (i) We laten eerst zien dat de functie voor $a \in \mathbb{Q}$ niet continu is. Zij $a = \frac{p}{q}$, dan is $f(a) = \frac{1}{q}$ en we kiezen $\varepsilon = \frac{1}{2q}$. Als $f(x)$ continu in a was, zou er rond a een interval moeten liggen dat geen niet-rationaal bevat, want de functiewaarde 0 ligt buiten de ε -streep rond $f(a)$.

Maar voor $a \in \mathbb{Q}$ ligt in ieder interval $(a - \delta, a + \delta)$ met $\delta > 0$ een niet-rationaal getal (neem bijvoorbeeld k zo dat $10^{-k} < \delta$, dan is $10^{-k} \frac{\pi}{10} < \delta$ en $a + 10^{-k} \frac{\pi}{10} \notin \mathbb{Q}$), dus is de functie voor $a \in \mathbb{Q}$ niet continu.

Voor $a \notin \mathbb{Q}$ is de functie wel continu. De reden hiervoor is, dat we voor een steeds betere benadering van een niet-rationaal getal steeds grotere noemers nodig hebben. We gaan dit expliciet na:

Zij $\varepsilon > 0$ en zij $N \in \mathbb{N}$ met $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Dan liggen voor alle $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ met $q \geq N$ de functiewaarden $f(x)$ in de ε -streep rond $0 = f(a)$, want $f(x) = \frac{1}{q} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$. We moeten dus een interval rond a vinden, waarin alleen maar niet-rationale getallen en breuken met noemer minstens N liggen.

Maar er zijn slechts eindig veel breuken $\frac{p}{q}$ met $q < N$ die in het interval $(a - 1, a + 1)$ vallen, en één van deze breuken (zeg $\frac{p_0}{q_0}$) is degene die het dichtst bij a ligt. Kies dus $\delta = |a - \frac{p_0}{q_0}|$, dan is voor alle $\frac{p}{q}$ die in het interval $(a - \delta, a + \delta)$ liggen $q \geq N$.

- (ii) We raken in de problemen als we een functie met verschillende (constante) waarden voor rationale en niet-rationale getallen definiëren, want ieder niet-rationaal getal wordt door rationale getallen willekeurig goed benaderd, maar natuurlijk liggen ook rond een rationaal getal willekeurig dicht niet-rationale getallen.

We definiëren dus

$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{als } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{als } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Voor $a \notin \mathbb{Q}$ is de functie niet continu, want in ieder interval $(a - \delta, a + \delta)$ met $\delta > 0$ ligt er een rationaal getal (neem bijvoorbeeld k zo dat $10^{-k} < \delta$ en kies de decimale benadering van a met k cijfers achter de komma). Met $\varepsilon = 1$ geeft dit een tegenspraak tegen de continuïteit van $f(x)$ in a .

Omgekeerd ligt er ook voor $a \in \mathbb{Q}$ in ieder interval $(a - \delta, a + \delta)$ met $\delta > 0$ een niet-rationaal getal (zie deel (i)). Ook hier laat de keuze $\varepsilon = 1$ zien dat de functie niet continu in a is.

De functie $|f(x)|$ is constant 1 en dus natuurlijk wel continu.

Opgave 11.

Bepaal de volgende afgeleiden:

- | | |
|--|---|
| (i) $f(x) := x^x$; | (ii) $f(x) := \exp(-x^2)$; |
| (iii) $f(x) := (((x^2 + x)^3 + x)^4 + x)^5$; | (iv) $f(x) := \ln\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\right)$; |
| (v) $f(x) := \sin(x + \sin(x))$; | (vi) $f(x) := \sin\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)$; |
| (vii) $f(x) := \sin(6 \cos(6 \sin(6 \cos(6x))))$; | (viii) $f(x) := 5^{\cos(x)}$; |
| (ix) $f(x) := \sin(\sin(\sin(\sin(\sin(x)))))$; | (x) $f(x) := \sin((\sin^7(x^7) + 1)^7)$. |

Oplossing. Bij deze opgave worden alleen maar de oplossingen ter controle aangegeven. Merk op dat soms nog de een of andere algebraïsche manipulatie nodig is om je (juist) resultaat met deze oplossingen in overeenstemming te brengen.

- | |
|--|
| (i) $f'(x) = x^x(\ln(x) + 1)$; |
| (ii) $f'(x) = -2x \exp(-x^2)$; |
| (iii) $f'(x) = 5(((x^2 + x)^3 + x)^4 + x)^4(4((x^2 + x)^3 + x)^3(3(x^2 + x)^2(2x + 1) + 1) + 1)$; |
| (iv) $f'(x) = \frac{2x}{-1+x^4}$; |
| (v) $f'(x) = \cos(x + \sin(x))(1 + \cos(x))$; |
| (vi) $f'(x) = -\cos\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)\frac{\sin(x)x + \cos(x)}{x^2}$; |

- (vii) $f'(x) = 1296 \cos(6 \cos(6 \sin(6 \cos(6x)))) \sin(6 \sin(6 \cos(6x)))$
 $\cos(6 \cos(6x)) \sin(6x);$
- (viii) $f'(x) = -5^{\cos(x)} \sin(x) \ln(5);$
- (ix) $f'(x) = \cos(\sin(\sin(\sin(\sin(x)))) \cos(\sin(\sin(\sin(x)))) \cos(\sin(\sin(x)))$
 $\cos(\sin(x)) \cos(x);$
- (x) $f'(x) = 343 \cos((\sin^7(x^7) + 1)^7)(\sin^7(x^7) + 1)^6 \sin^6(x^7) \cos(x^7) x^6.$

Opgave 12.

Bepaal voor de volgende functies de Taylor veelterm van graad 4 in $x_0 = 0$:

- (i) $f(x) := \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}};$
- (ii) $f(x) := \frac{1}{1+x^2};$
- (iii) $f(x) := \sin(2x^2);$
- (iv) $f(x) := e^{-3x};$
- (v) $f(x) := (1+x)^a$ met $a \in \mathbb{R}.$

Oplossing. We moeten in ieder geval $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ en $f''''(0)$ berekenen, dan is de Taylor veelterm gegeven door

$$p_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f''''(0)}{24}x^4.$$

(i) Er geldt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}, & f''(x) &= -\frac{2}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}}, \\ f'''(x) &= \frac{10}{27}(1+x)^{-\frac{8}{3}}, & f''''(x) &= -\frac{80}{81}(1+x)^{-\frac{11}{3}}, \\ f(0) &= 1, f'(0) = \frac{1}{3}, f''(0) = -\frac{2}{9}, f'''(0) = \frac{10}{27}, f''''(0) = -\frac{80}{81} \end{aligned}$$

dus is

$$p_4(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4.$$

(ii) Er geldt

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, & f''(x) &= \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}, \\ f'''(x) &= -\frac{24x^3-24x}{(1+x^2)^4}, & f''''(x) &= \frac{120x^4-240x^2+24}{(1+x^2)^5}, \\ f(0) &= 1, f'(0) = 0, f''(0) = -2, f'''(0) = 0, f''''(0) = 24 \end{aligned}$$

dus is

$$p_4(x) = 1 - x^2 + x^4.$$

(iii) Er geldt

$$\begin{aligned}f'(x) &= 4x \cos(2x^2), & f''(x) &= -16x^2 \sin(2x^2) + 4 \cos(2x^2), \\f'''(x) &= -64x^3 \cos(2x^2) - 48x \sin(2x^2), \\f''''(x) &= 256x^4 \sin(2x^2) - 384x^2 \cos(2x^2) - 48 \sin(2x^2),\end{aligned}$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = 4, f'''(0) = 0, f''''(0) = 0$$

dus is

$$p_4(x) = 2x^2.$$

(iv) Er geldt

$$\begin{aligned}f'(x) &= -3e^{-3x}, & f''(x) &= 9e^{-3x}, \\f'''(x) &= -27e^{-3x}, & f''''(x) &= 81e^{-3x},\end{aligned}$$

$$f(0) = 1, f'(0) = -3, f''(0) = 9, f'''(0) = -27, f''''(0) = 81$$

dus is

$$p_4(x) = 1 - 3x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4.$$

(v) Er geldt

$$\begin{aligned}f'(x) &= a(1+x)^{a-1}, & f''(x) &= a(a-1)(1+x)^{a-2}, \\f'''(x) &= a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3}, \\f''''(x) &= a(a-1)(a-2)(a-3)(1+x)^{a-4},\end{aligned}$$

(merk op dat deze formules ook voor de speciale gevallen $a = 0, 1, 2, 3$ gelden)

$$\begin{aligned}f(0) &= 1, f'(0) = a, f''(0) = a(a-1), \\f'''(0) &= a(a-1)(a-2), f''''(0) = a(a-1)(a-2)(a-3)\end{aligned}$$

dus is

$$p_4(x) = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{6}x^3 + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{24}x^4.$$

Webpagina: <http://www.math.ru.nl/~souvi/calcanalyse/calcanalyse.html>