

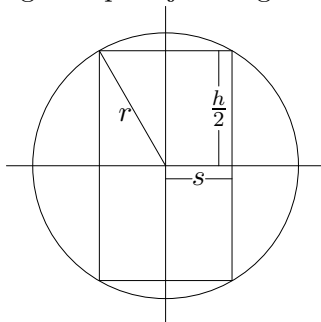
Uitwerkingen huiswerk week 4

Opgave 13.

Bepaal de hoogte en het volume van de grootste cilinder (qua volume) die in een kogel van straal r past.

Oplossing. We noemen de hoogte van de cilinder h en de straal van zijn grondvlak s , dan heeft de kogel volume $V = \pi s^2 h$.

De grootst mogelijke cilinder moet natuurlijk de kogel raken, dus krijgen we een zijaanzicht zo als in het volgende plaatje: Volgens de stelling van Pythagoras



geldt $(\frac{h}{2})^2 + s^2 = r^2$ en dus $s^2 = r^2 - \frac{h^2}{4}$. Dit vullen we voor s^2 in de formule voor het volume in, dit geeft

$$V(h) = \pi(r^2 - \frac{h^2}{4})h = \pi r^2 h - \frac{\pi}{4}h^3 \text{ en dus } V'(h) = \pi r^2 - \frac{3\pi}{4}h^2.$$

Er geldt

$$V'(h) = 0 \Leftrightarrow h^2 = \frac{4}{3}r^2,$$

dus is het volume maximaal voor $h = \frac{2}{\sqrt{3}}r$.

Hieruit volgt $s^2 = r^2 - \frac{h^2}{4} = r^2 - \frac{1}{3}r^2 = \frac{2}{3}r^2$. Het maximale volume is dus

$$V = \pi s^2 h = \pi \frac{2}{3}r^2 \frac{2}{\sqrt{3}}r = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}r^3.$$

Opgave 14.

Baron Münchhausen wordt op zijn kogel met een hoek van α tegen de grond en een snelheid van v afgevuurd. Zijn traject wordt beschreven door

$$(x, y) = (v \cos(\alpha)t, v \sin(\alpha)t - \frac{g}{2}t^2),$$

waarbij g de acceleratie door de aantrekking van de aarde is (dus ongeveer $9.81 \frac{m}{s^2}$).

(i) Na welke tijd t komt de Baron weer naar de grond?

- (ii) Bepaal de hoek α zo dat de Baron zo ver als mogelijk op zijn kogel kan rijden.
- (iii) Als de Baron van een hogere punt (bijvoorbeeld zijn dakterras) wordt afgevuurd, moet de optimale hoek α dan groter of kleiner gekozen worden?

Oplossing.

- (i) De kogel (en de baron) raakt de grond voor $y = 0$, dus moet $v \sin(\alpha)t = \frac{g}{2}t^2$, dus $t = 0$ (daar wordt de kogel afgevuurd) of $t_0 = \frac{2v \sin(\alpha)}{g}$.
- (ii) Op het tijdstip t_0 dat de kogel de grond weer raakt, is de x -coördinaat gegeven door

$$x(\alpha) = v \cos(\alpha)t_0 = v \cos(\alpha) \frac{2v}{g} \sin(\alpha).$$

De afgeleide hiervan is

$$x'(\alpha) = \frac{2v^2}{g}(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))$$

en er geldt $x'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos^2(\alpha) = \sin^2(\alpha)$. Voor een hoek α tussen 0 en 90 graden is de enige mogelijkheid hiervoor $\alpha = 45^\circ$.

- (iii) Dit kunnen we met een intuïtief argument of met een expliciete berekening beantwoorden. In deel (ii) hebben we gezien dat het optimale traject van de kogel een stuk parabool is die aan beide einden een hoek van 45° met de grond maakt. Als we nu op een hoger punt beginnen, is het optimale traject nog steeds een parabool met hoeken van 45° die echter pas voor een negatieve waarde van x weer de grond raakt (omdat ze voor $x = 0$ al hoogte h heeft). Omdat de hoek die de baan met de horizontale as maakt steeds kleiner wordt, moet de hoek bij $x = 0$ dus kleiner zijn dan 45° .

De expliciete berekening gaat als volgt: Het tijdstip t_0 waarop de kogel nu de grond raakt is de oplossing van $-\frac{g}{2}t^2 + v \sin(\alpha)t + h = 0$ en dit is

$$t_0 = \frac{v}{g} \sin(\alpha) + \sqrt{\frac{v^2}{g^2} \sin^2(\alpha) + \frac{2h}{g}} = \frac{v}{g} \left(\sin(\alpha) + \sqrt{\sin^2(\alpha) + \frac{2hg}{v^2}} \right)$$

De afstand die de kogel tot t_0 aflegt is dus

$$x(\alpha) = v \cos(\alpha)t_0 = \frac{v^2}{g} \left(\cos(\alpha) \sin(\alpha) + \cos(\alpha) \sqrt{\sin^2(\alpha) + \frac{2hg}{v^2}} \right).$$

Voor het gemak korten we de wortel $\sqrt{\sin^2(\alpha) + \frac{2hg}{v^2}}$ even af met $w(\alpha)$ dan geldt voor de afgeleide:

$$x'(\alpha) = \frac{v^2}{g} \left(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) - \sin(\alpha)w(\alpha) + \cos(\alpha) \frac{\sin(\alpha) \cos(\alpha)}{w(\alpha)} \right)$$

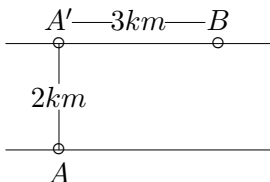
We moeten nu alleen maar nagaan of $x(\alpha)$ voor $\alpha = 45^\circ$ stijgend of dalend is, in het eerste geval moeten we de hoek α groter kiezen, in het laatste geval kleiner. We moeten dus zien of $x'(45^\circ) > 0$ of $x'(45^\circ) < 0$. Er geldt $\cos(45^\circ) = \sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ en dit ingevuld geeft

$$\begin{aligned} x'(45^\circ) &= \frac{v^2}{g} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} w(45^\circ) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{w(45^\circ)} \right) \\ &= \frac{v^2}{g} \frac{1}{\sqrt{2} w(45^\circ)} \left(-w(45^\circ)^2 + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

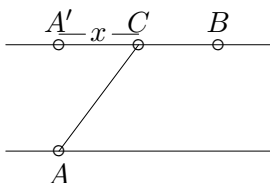
Maar $w(\alpha) = \sqrt{\sin^2(\alpha) + \frac{2hg}{v^2}} > \sqrt{\sin^2(\alpha)} = \sin(\alpha)$, dus is $w(45^\circ)^2 > \frac{1}{2}$ en dus is $x'(45^\circ) < 0$. De functie $x(\alpha)$ is dus dalend in $\alpha = 45^\circ$, dus wordt de maximale afstand bij een kleinere hoek dan 45° behaald.

Opgave 15.

Iemand wil van een punt A aan de oever van een $2km$ breed meer naar een punt B aan de overkant van het meer. Het punt A' rechtstreeks tegenover A aan de overkant heeft een afstand van $3km$ van het punt B . Op het meer (zonder stroming) kan hij met een snelheid van $3km/h$ zwemmen, aan land loopt hij met een snelheid van $6km/h$. Wat is de snelste weg om van A naar B te komen?



Oplossing. Het traject is eerst een (recht) stuk zwemmen van A naar een punt C tussen A' en B en vervolgens nog het stuk van C naar B lopen. De afstand van A' naar C noteren we met x :



De afstand van A naar C is dan (volgens Pythagoras) $\sqrt{2^2 + x^2}$ en de afstand van C naar B is $3 - x$. De benodigde tijd om een afstand s met snelheid v af te leggen is $t = \frac{s}{v}$, dus is de benodigde tijd $t(x)$ voor het traject $A - C - B$ gegeven door

$$t(x) = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3} + \frac{3 - x}{6}$$

en er geldt

$$t'(x) = \frac{x}{3\sqrt{4 + x^2}} - \frac{1}{6}.$$

Oplossen van $t'(x) = 0$ naar x geeft

$$2x = \sqrt{4 + x^2} \text{ dus } 4x^2 = 4 + x^2 \text{ dus } x = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.1547.$$

Opgave 16.

Rupsje *Altijdlui*, het broertje van een veel bekender rupsje, stond onder aan een plant toen een raar gevoel hem bekreep. Hij bedacht zich dat dit misschien wel de laatste plant zou zijn waar hij in zou kruipen en lekker van zou eten voordat hij zich zou verpoppen. Deze gedachte stemde rupsje *Altijdlui* niet verdrietig, want hij had de plant al goed bestudeerd zodat hij wist dat de energiewaarde van alle blaadjes op een hoogte h gegeven wordt door de functie $E(h)$ met domein $[0, 60]$, gedefinieerd door:

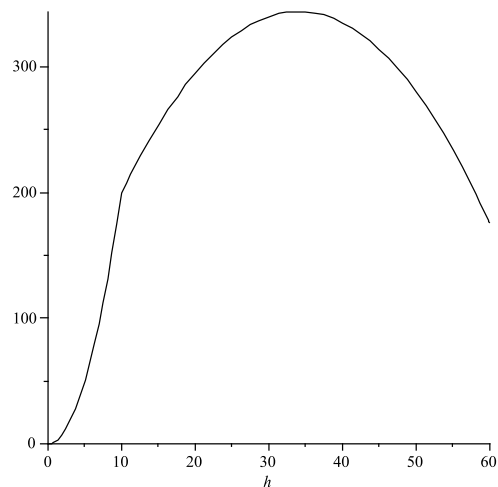
$$E(h) = \begin{cases} 2h^2 & 0 \leq h \leq 10 \\ -\frac{1}{4}h^2 + 17h + 55 & 10 < h \leq 60 \end{cases}$$

Rupsje *Altijdlui* had het plan op gevat om eerst tot een bepaalde hoogte te klimmen, onderweg geen blaadjes te eten om zich daar de blaadjes lekker te laten smaken. Het kost rupsje *Altijdlui* de energiewaarde $13h$ om tot een hoogte h te klimmen.

- (i) Maak een schets van de functie $E(h)$.
- (ii) Is $E(h)$ continu in het punt $h = 10$?
- (iii) Is $E(h)$ differentieerbaar in het punt $h = 10$?
- (iv) Op welke hoogte hebben de blaadjes de hoogste energiewaarde?
- (v) Bepaal de hoogte tot waar rupsje *Altijdlui* het beste kan klimmen om daar van de blaadjes te genieten, zodat hij de meeste energie over heeft om zich te verpoppen tot majestueuze vlinder?
Hoeveel energie blijft er op deze hoogte over voor het verpoppen?

Oplossing.

- (i) De functie ziet er als volgt uit:



- (ii) Hiervoor moeten we $h = 10$ in de twee termen $f(h) = 2h^2$ en $g(h) = -\frac{1}{4}h^2 + 17h + 55$ in de definitie van $E(h)$ invullen. Er geldt $f(10) = 200$ en $g(10) = -25 + 170 + 55 = 200$, dus is de functie inderdaad continu in $h = 10$.
- (iii) We moeten $h = 10$ in de afgeleiden $f'(h)$ en $g'(h)$ invullen, deze zijn $f'(h) = 4h$ en $g'(h) = -\frac{1}{2}h + 17$ en er geldt $f'(10) = 40$ en $g'(10) = 12$. De functie is dus in $h = 10$ niet differentieerbaar.
- (iv) Er geldt $f'(h) = 4h \geq 0$ voor $h \in [0, 10]$, dus is de functie stijgend op $[0, 10]$. Verder is $g'(h) = 0$ voor $h = 34$ en omdat $g''(h) = -\frac{1}{2} < 0$ moet dit een maximum zijn. De blaadjes hebben dus voor $h = 34$ de hoogste energiewaarde (van 344).
- (v) We moeten nu naar de functie $F(h) := E(h) - 13h$ kijken. Voor $h \in [0, 10]$ geldt $F'(h) = 4h - 13$, dus heeft de functie een minimum in $h = \frac{13}{4}$ en liggen de lokale maxima aan de rand van $[0, 10]$. Met $F(0) = 0$ en $F(10) = 200 - 130 = 70$ volgt dat het maximum op $[0, 10]$ voor $h = 10$ bereikt wordt.
- Voor $h \in [10, 60]$ is $F'(h) = -\frac{1}{2}h + 4 < 0$, want voor $h > 8$ is $8 - h < 0$. De functie $F(h)$ is dus dalend op $[10, 60]$, dus wordt het maximum in $h = 10$ aangenomen. Het rupsje houdt dus een energiewaarde van $F(10) = 70$ over om te verpoppen.

Webpagina: <http://www.math.ru.nl/~souvi/calcanalyse/calcanalyse.html>