Uitwerkingen huiswerk week 6

Opgave 21.
Bepaal de volgende integralen m.b.v. substitutie:

$$\text{(i)} \int e^x \sin(e^x)\, dx, \quad \text{(ii)} \int x\, e^{-x^2}\, dx, \quad \text{(iii)} \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx, \quad \text{(iv)} \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx,$$

$$\text{(v)} \int \frac{\ln(x)}{x}\, dx, \quad \text{(vi)} \int \ln(\cos(x)) \tan(x)\, dx, \quad \text{(vii)} \int \frac{\ln(\ln(x))}{x \ln(x)}\, dx.$$

Oplossing.

(i) Substitutie $u = e^x$, $du = e^x\, dx$:
$\int e^x \sin(e^x)\, dx = \int \sin(u)\, du = -\cos(u) = -\cos(e^x)$.

(ii) Substitutie $u = x^2$, $du = 2x\, dx$:
$\int x\, e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int e^{-u}\, du = -\frac{1}{2} e^{-u} = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$.

(iii) Substitutie $u = x^2$, $du = 2x\, dx$:
$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du = \frac{1}{2} \arcsin(u) = \frac{1}{2} \arcsin(x^2)$.

(iv) Substitutie $u = \sqrt{x}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$:
$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = 2 \int e^u\, du = 2e^u = 2e^{\sqrt{x}}$.

(v) Substitutie $u = \ln(x)$, $du = \frac{1}{x}\, dx$:
$\int \frac{\ln(x)}{x}\, dx = \int u\, du = \frac{1}{2} u^2 = \frac{1}{2} \ln(x)^2$.

(vi) Substitutie $u = \cos(x)$, $du = -\sin(x)\, dx$:
$\int \ln(\cos(x)) \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\, dx = -\int \ln(u) \frac{1}{u}\, du \underset{\text{(v)}}{=} -\frac{1}{2} \ln(u)^2 = -\frac{1}{2} \ln(\cos(x))^2$.

(vii) Substitutie $u = \ln(x)$, $du = \frac{1}{x}\, dx$:
$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x \ln(x)}\, dx = \frac{\ln(u)}{u}\, du \underset{\text{(v)}}{=} \frac{1}{2} \ln(u)^2 = \frac{1}{2} \ln(\ln(x))^2$.

Opgave 22.
Bepaal de volgende integralen (bijvoorbeeld m.b.v. substitutie):

$$\text{(i)} \int x(x^2-1)^{99}\, dx, \quad \text{(ii)} \int \frac{\ln(\ln(x))}{x}\, dx, \quad \text{(iii)} \int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1}\, dx,$$

$$\text{(iv)} \int e^{e^x} e^x\, dx, \quad \text{(v)} \int x\sqrt{1-x^2}\, dx, \quad \text{(vi)} \int \frac{\tan(ax)}{\cos(ax)}\, dx.$$

Oplossing.

(i) Substitutie $u = x^2 - 1$, $du = 2x\,dx$:
$\int x(x^2-1)^{99}\ dx = \frac{1}{2}\int u^9 9\ du = \frac{1}{200}u^{100} = \frac{1}{200}(x^2-1)^{100}$.

(ii) Substitutie $u = \ln(x)$, $du = \frac{1}{x}\,dx$:
$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x}\ dx = \int \ln(u)\ du \underset{\text{partieel}}{=} u\ln(u) - u = \ln(x)\ln(\ln(x)) - \ln(x)$.

(iii) Substitutie $u = e^x$, $du = e^x\,dx$:
$\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}\ dx = \int \frac{1}{(u+1)^2}\ du = -\frac{1}{u+1} = -\frac{1}{e^x+1}$.

(iv) Substitutie $u = e^x$, $du = e^x\,dx$:
$\int e^{e^x}e^x\ dx = \int e^u\ du = e^u = e^{e^x}$.

(v) Substitutie $u = 1-x^2$, $du = -2x\,dx$:
$\int x\sqrt{1-x^2}\ dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{u}\ du = -\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}(\sqrt{1-x^2})^3$.

(vi) Substitutie $u = ax$, $du = a\,dx$:
$\int \frac{\tan(ax)}{\cos(ax)}\ dx = \frac{1}{a}\int \frac{\tan(u)}{\cos(u)}\ du \underset{\text{zie college}}{=} \frac{1}{a}\frac{1}{\cos(u)} = \frac{1}{a\cos(ax)}$.

Opgave 23.
Laat zien dat de volgende integratie regels gelden:

$$\text{(i)}\ \int (f(x))^n\, f'(x)\ dx = \frac{1}{n+1}f(x)^{n+1}, \qquad \text{(ii)}\ \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\ dx = 2\sqrt{f(x)}.$$

Oplossing. Dit volgt rechtstreeks door differentiëren of door de substitutie $u = f(x)$, $du = f'(x)\ dx$.

Opgave 24.
Bepaal een primitieve van

$$f(x) := \frac{x+a}{x^2+2bx+c}.$$

Aanwijzing: Door de teller als $x+a = \frac{1}{2}(2x+2b)+(a-b) = \frac{1}{2}(x^2+2bx+c)' + (a-b)$ te herschrijven, wordt de functie in twee handigere breuken opgesplitst. Verder is het handig om de noemer te herschrijven als $x^2+2bx+c = (x+b)^2+(c-b^2)$. In het vervolg moeten de gevallen $c > b^2$, $c = b^2$ en $c < b^2$ apart bekeken worden.

Oplossing. Er geldt

$$\begin{aligned}\int \frac{x+a}{x^2+2bx+c}\ dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2b}{x^2+2bx+c}\ dx + \int \frac{a-b}{x^2+2bx+c}\ dx \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+2bx+c) + (a-b)\int \frac{1}{(x+b)^2+c-b^2}\ dx\end{aligned}$$

Om de integraal $\int \frac{1}{(x+b)^2+c-b^2}\ dx$ op te lossen, substitueren we $u = x+b, du = dx$ en onderscheiden de volgende drie gevallen:

$c = b^2$: In dit geval is

$$\int \frac{1}{(x+b)^2 + c - b^2}\,dx = \int \frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{x+b}.$$

$c < b^2$: Zij $d := \sqrt{b^2 - c}$, dus $c - b^2 = -d^2$, dan is

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x+b)^2 + c - b^2}\,dx &= \int \frac{1}{u^2 - d^2}\,du = \int \frac{1}{2d}\left(\frac{1}{u-d} - \frac{1}{u+d}\right)\,du \\
&= \frac{1}{2d}\left(\ln(u-d) - \ln(u+d)\right) = \frac{1}{2d}\ln\left(\frac{u-d}{u+d}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{b^2-c}}\ln\left(\frac{x+b-\sqrt{b^2-c}}{x+b+\sqrt{b^2-c}}\right).
\end{aligned}$$

$c > b^2$: Zij $d := \sqrt{c - b^2}$, dus $c - b^2 = d^2$, dan is

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x+b)^2 + c - b^2}\,dx &= \int \frac{1}{u^2 + d^2}\,du = \frac{1}{d}\arctan\left(\frac{u}{d}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{c-b^2}}\arctan\left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}\right).
\end{aligned}$$

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/calcanalyse/calcanalyse.html