

Uitwerkingen huiswerk week 7

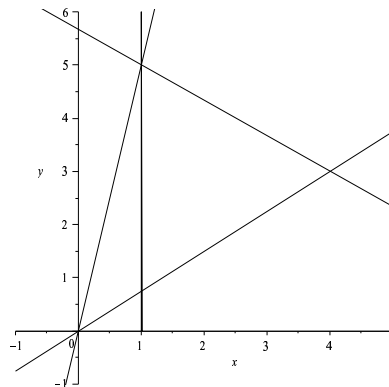
Opgave 25.

Bepaal de oppervlakken van de volgende gebieden m.b.v. bepaalde integralen:

- (i) De driehoek met hoekpunten $(0, 0)$, $(4, 3)$ en $(1, 5)$.
- (ii) Het gebied ingesloten tussen de grafieken van $f(x) = e^{2x}$ en $g(x) = 2e^x$ en de y -as.
- (iii) Het gebied ingesloten tussen de grafieken van $f(x) = x$, $g(x) = 2x$ en $h(x) = \frac{2}{x^2}$.

Oplossing.

- (i) De driehoek is begrensd door de drie lineaire functies $f(x) = \frac{3}{4}x$ (lijn door $(0, 0)$ en $(4, 3)$), $g(x) = 5x$ (lijn door $(0, 0)$ en $(1, 5)$) en $h(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{17}{3}$ (lijn door $(1, 5)$ en $(4, 3)$).



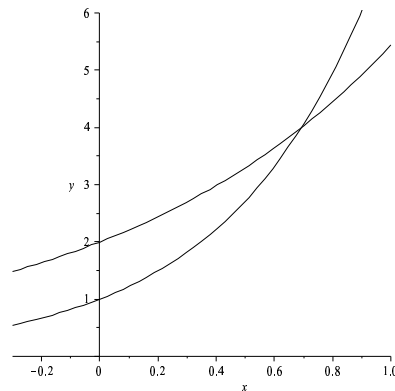
Om de oppervlakte D van de driehoek als integraal te berekenen, splitsen we hem bij $x = 1$ in twee delen, dan geldt

$$\begin{aligned}
 D &= \int_0^1 (g(x) - f(x)) \, dx + \int_1^4 (h(x) - f(x)) \, dx \\
 &= \int_0^1 \frac{17}{4}x \, dx + \int_1^4 -\frac{17}{12}x + \frac{17}{3} \, dx = \frac{17}{8}x^2 \Big|_0^1 + \left(-\frac{17}{24}x^2 + \frac{17}{3}x\right) \Big|_1^4 \\
 &= \frac{17}{8} - \frac{34}{3} + \frac{68}{3} + \frac{17}{24} - \frac{17}{3} = \frac{17}{2}.
 \end{aligned}$$

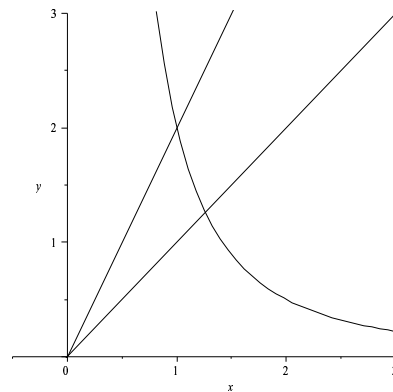
- (ii) Voor het snijpunt van $f(x)$ en $g(x)$ geldt $e^{2x} = 2e^x$, d.w.z. $2x = \ln(2e^x) = \ln(2) + x$, dus is $x = \ln(2)$.

De oppervlakte is dus gegeven door de integraal

$$\int_0^{\ln(2)} (2e^x - e^{2x}) \, dx = \left(2e^x - \frac{1}{2}e^{2x}\right) \Big|_0^{\ln(2)} = 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 4 - 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$



- (iii) De lijnen $f(x)$ en $g(x)$ snijden elkaar in $x = 0$. Voor het snijpunt van $f(x)$ met $h(x)$ geldt $x = \frac{2}{x^2}$, dus $x^3 = 2$, dus $x = \sqrt[3]{2}$. Voor het snijpunt van $g(x)$ met $h(x)$ geldt $2x = \frac{2}{x^2}$, dus $x^3 = 1$, dus $x = 1$.



De oppervlakte van het ingesloten gebied is dus

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx + \int_1^{\sqrt[3]{2}} (h(x) - f(x)) dx \\ &= \int_0^1 x dx + \int_1^{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{2}{x^2} - x \right) dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 + \left(-\frac{2}{x} - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_1^{\sqrt[3]{2}} \\ &= \frac{1}{2} - 2 \cdot 2^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{2}{3}} + 2 + \frac{1}{2} = 3 - \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \approx 0.6189. \end{aligned}$$

Opgave 26.

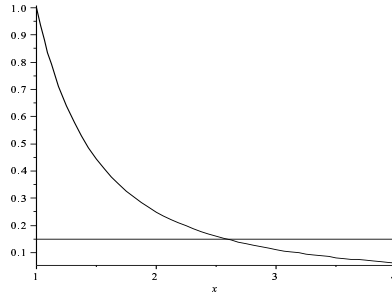
Op welke x -waarde moet een *verticale* lijn getekend worden om het gebied onder de grafiek van $f(x) = \frac{1}{x^2}$ op het interval $[1, 4]$ in twee even grote stukken te delen?

Op welke y -waarde moet een *horizontale* lijn getekend worden om hetzelfde gebied in twee even grote stukken te delen?

Oplossing. We bepalen eerste de oppervlakte van het gebied onder de grafiek: $\int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^4 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$. We moeten dus een waarde c vinden met

$\int_1^c \frac{1}{x^2} dx = \frac{3}{8}$. Maar net als boven geldt $\int_1^c \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^c = -\frac{1}{c} + 1$ en uit $-\frac{1}{c} + 1 = \frac{3}{8}$ volgt $c = \frac{8}{5} = 1.6$.

Bij de horizontale lijn moet het stuk tussen de grafiek en de lijn tot aan het snijpunt van grafiek en lijn de helft van het gebied zijn.



Bij een lijn op hoogte c ligt het snijpunt bij $x = \frac{1}{\sqrt{c}}$, dus moet c zo gekozen worden dat

$$\int_1^{\frac{1}{\sqrt{c}}} \left(\frac{1}{x^2} - c \right) dx = \frac{3}{8}.$$

Er geldt

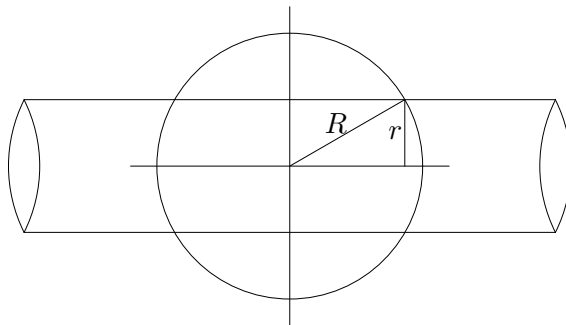
$$\int_1^{\frac{1}{\sqrt{c}}} \left(\frac{1}{x^2} - c \right) dx = -\frac{1}{x} - cx \Big|_1^{\frac{1}{\sqrt{c}}} = -\sqrt{c} - \sqrt{c} + 1 + c = c - 2\sqrt{c} + 1.$$

We moeten dus c zo bepalen dat $c - 2\sqrt{c} + 1 = \frac{3}{8}$, dus $c - 2\sqrt{c} + \frac{5}{8} = 0$. Maar dit kunnen we herschrijven als $(\sqrt{c} - 1)^2 - 1 + \frac{5}{8} = 0$, dus $(\sqrt{c} - 1)^2 - \sqrt{\frac{3}{8}}^2 = 0$, dus $\sqrt{c} = 1 \pm \sqrt{\frac{3}{8}}$. Omdat c tussen 1 en $\frac{1}{16}$ moet liggen (anders snijdt de lijn de grafiek niet), moet $c = (1 - \sqrt{\frac{3}{8}})^2 = \frac{11}{8} - \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 0.150255$ gelden.

Opgave 27.

Door een bol van straal R wordt (langs de x -as) door het middelpunt van de bol een gat van straal r geboord. Bepaal het volume van het overgebleven lichaam (de uitgeholde bol).

Oplossing.



De bol is het rotatielichaam van de functie $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ op het interval $[-R, R]$. Als we een gat van straal r door de bol boren, treft het gat in $x =$

$\pm\sqrt{R^2 - r^2}$ op de bol. De uitgeholde bol vinden we dus als rotatie lichaam van de functie $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ op het interval $[-\sqrt{R^2 - r^2}, \sqrt{R^2 - r^2}]$ waarvan we de cilinder van lengte $2\sqrt{R^2 - r^2}$ en straal r moeten aftrekken.

De cilinder heeft volume $2\sqrt{R^2 - r^2} \cdot \pi r^2$ en voor het volume van de bol zonder eindstukken (dus op het interval $[-\sqrt{R^2 - r^2}, \sqrt{R^2 - r^2}]$) vinden we (gebruik makend van de symmetrie)

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\sqrt{R^2 - r^2}} \pi(\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx &= 2\pi \int_0^{\sqrt{R^2 - r^2}} (R^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi(R^2 x - \frac{1}{3}x^3) \Big|_0^{\sqrt{R^2 - r^2}} = 2\pi(R^2 \sqrt{R^2 - r^2} - \frac{1}{3}\sqrt{R^2 - r^2}^3) \\ &= 2\pi\sqrt{R^2 - r^2}(R^2 - \frac{1}{3}(R^2 - r^2)) = 2\pi\sqrt{R^2 - r^2} \left(\frac{2}{3}R^2 - \frac{1}{3}r^2 \right). \end{aligned}$$

Voor het volume van de uitgeholde bol volgt hieruit

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\sqrt{R^2 - r^2} \left(\frac{2}{3}R^2 - \frac{1}{3}r^2 \right) - 2\sqrt{R^2 - r^2} \cdot \pi r^2 \\ &= 2\pi\sqrt{R^2 - r^2} \left(\frac{2}{3}R^2 - \frac{1}{3}r^2 - r^2 \right) = \frac{4}{3}\pi\sqrt{R^2 - r^2}(R^2 - r^2) = \frac{4}{3}\pi\sqrt{R^2 - r^2}^3. \end{aligned}$$

I.h.b. vinden we voor $r = 0$ het volume $\frac{4}{3}\pi R^3$ van de bol terug.

Opgave 28.

Bepaal de lengte van de grafieken voor de volgende functies op de aangegeven intervallen:

- (i) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ op het interval $[-1, 1]$ (deze kromme heet de *kettinglijn*);
- (ii) $f(x) = \ln(x)$ op het interval $[1, 3]$ (hint: substitueer $u = \sqrt{x^2 + 1}$).

Oplossing.

- (i) Er geldt $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, dus $f'(x)^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})$ en dus $1 + f'(x)^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) = (\frac{e^x + e^{-x}}{2})^2$. Voor de lengte l van de grafiek geldt dus

$$l = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \Big|_{-1}^1 = e - \frac{1}{e}.$$

- (ii) We hebben $f(x) = \ln(x)$, dus $f'(x) = \frac{1}{x}$, dus is $\int \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx$. Voor de laatste integraal substitueren we $u = \sqrt{x^2 + 1}$, dus $x = \sqrt{u^2 - 1}$ en $dx = \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} du$. Dit geeft

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx &= \int \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} du = \int \frac{u^2}{u^2 - 1} du \\ &= \int 1 du + \int \frac{1}{u^2 - 1} du = u + \frac{1}{2} \left(\int \left(\frac{1}{u - 1} - \frac{1}{u + 1} \right) du \right) \\ &= u + \frac{1}{2} \ln(u - 1) - \frac{1}{2} \ln(u + 1) = u + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{u - 1}{u + 1} \right) \\ &= \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} \right) \end{aligned}$$

Als we de zo gevonden primitieve van $\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ in $x = 3$ en $x = 1$ evalueren, vinden we voor de lengte van de grafiek

$$\sqrt{10} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{10} - 1}{\sqrt{10} + 1}\right) - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}\right) \approx 2.302.$$

Webpagina: <http://www.math.ru.nl/~souvi/calcanalyse/calcanalyse.html>