Huiswerk week 1

Opgave 1. (Cameron: Chapter 2, opgave 3)

(i) Bewijs met inductie dat $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$ voor $n \geq 1$. (Je mag gebruiken dat $(1+\frac{1}{n})^n < e$ voor $n \in \mathbb{N}$.)

(ii) Het *meetkundig gemiddelde* van n niet-negatieve getallen x_i is gegeven door $M(x_1, \ldots, x_n) := (\prod_{i=1}^n x_i)^{\frac{1}{n}}$. Het *rekenkundig gemiddelde* van n getallen x_i is gegeven door $R(x_1, \ldots, x_n) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$. Er geldt dat $M(x_1, \ldots, x_n) \leq R(x_1, \ldots, x_n)$ met gelijkheid alleen maar als $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Gebruik deze ongelijkheid om aan te tonen dat $n! < (\frac{n+1}{2})^n$ voor $n > 1$. Concludeer dat $n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$ voor $n \geq 1$.

Opgave 2. (Cameron: Chapter 2, opgave 11)
Zij $\mathcal{B}$ een systeem van b verzamelingen $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Stel dat geldt:

- iedere verzameling $B \in \mathcal{B}$ bevat precies k elementen;
- voor iedere $i \in \{1, \ldots, n\}$ is i in precies r verzamelingen $B \in \mathcal{B}$ bevat.

Laat zien dat $bk = nr$.
Geef een voorbeeld van zo'n systeem $\mathcal{B}$ voor de parameters $n = 6$, $k = 3$, $b = 4$, $r = 2$.

Opgave 3. (Cameron: Chapter 3, opgave 3)
Het is een gebruikelijke conventie dat $\binom{n}{k} = 0$ gedefinieerd wordt, als $k < 0$ of $k > n$.
Bewijs de volgende identiteiten voor binomiaalcoëfficiënten:

(i) $\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$.

(ii) $\sum_{i=0}^k \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$.

(iii) $\sum_{i=0}^k \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$.

(iv) $\sum_{k=1}^n k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

(v) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2 = \begin{cases} 0 & \text{als } n \text{ even;} \\ (-1)^m \binom{2m}{m} & \text{als } n = 2m. \end{cases}$

Opgave 4. (Cameron: Chapter 3, opgave 7)
Een (ouderwetse) computer moet binomiaalcoëfficiënten berekenen. Het grootste natuurlijke getal dat de computer kan verwerken is $32767 = 2^{15} - 1$.
De volgende vier manieren worden voorgesteld (waarbij de computer steeds van links naar rechts werkt, zo dat er alleen maar gehele getallen voorkomen):

(a) $\binom{n}{k} = (n!/k!)/(n-k)!$;

(b) $\binom{n}{k} = n(n-1)\ldots(n-k+1)/k!$;

(c) $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \cdot (n-k+1)/k!$ voor $k > 0$;

(d) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ voor $0 < k < n$.

Voor welke waarden van n en k laat zich $\binom{n}{k}$ met de verschillende methodes berekenen?
Geef ook een afschatting van de benodigde operaties (vermenigvuldigen/delen, optellen) voor de verschillende technieken.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/dw1_09/dw1.html