

Huiswerk week 2

Opgave 5.

Zij $Sym(n)$ de groep van permutaties van $\{1, \dots, n\}$.

- (i) Bepaal voor $2 \leq k \leq n$ het aantal k -cykels (x_1, x_2, \dots, x_k) in $Sym(n)$.
- (ii) (Cameron: Chapter 3, opgave 9) Bewijs dat de orde van een element $\pi \in Sym(n)$ het kleinste gemene veelvoud van de lengtes van cykels in de cykel notatie van π is.
- (iii) Bij een *shuffle* van een kaartspel met 52 kaarten wordt het spel in twee stapels opgesplitst en vervolgens worden de twee helften in elkaar geshuffeld, zo dat de kaarten in de volgorde 1, 27, 2, 28, \dots , 26, 52 komen.

Na hoeveel van deze shuffles zijn de kaarten weer in de oorspronkelijke volgorde?

Opgave 6.

De *exponent* $e := \exp(G)$ van een groep G is het kleinste getal e zo dat $g^e = 1$ voor alle $g \in G$. De exponent is dus het kleinste gemene veelvoud van de ordes van elementen in G . Het is bekend dat dit altijd een deler van de orde $|G|$ (het aantal elementen) van de groep is.

- (i) Bepaal voor $n = 2, 3, \dots, 8$ de exponent van $Sym(n)$.
- (ii) Zij $n \in \mathbb{N}$ en laten $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_r$ de priemgetallen $\leq n$ zijn.
Bewijs dat $\exp(Sym(n)) = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_r^{a_r}$ waarbij $p_i^{a_i}$ de hoogste macht van p_i is die $\leq n$ is.

Opgave 7. (Cameron: algoritme 3.12.4)

Implementeer een algoritme dat de elementen $[\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)]$ van $Sym(n)$ in lexicografische volgorde uitgeeft (bijvoorbeeld op de manier aangegeven in algoritme 3.12.4 op bladzijde 43 van Cameron).

Bepaal het 1001ste element in $Sym(n)$ voor $n = 7, 8, 9$ en $n = 1001$.

(In de lexicografische volgorde geldt $[x_1, \dots, x_n] < [y_1, \dots, y_n]$ als $x_i = y_i$ voor $1 \leq i < k$ en $x_k < y_k$, d.w.z. op de eerste plek waar de rijen verschillen is x_k kleiner dan y_k .)

Opgave 8. (Cameron: Chapter 3, opgave 20)

- (i) Bewijs voor het n -de Bell getal B_n dat $B_n < n!$ (voor $n > 2$).
(Hint: maak een injectieve afbeelding van partities naar permutaties.)
- (ii) Implementeer een algoritme die Bell getallen berekent. Bepaal B_{22} en geef de kleinste n aan zo dat B_n minstens 22 decimalen heeft.