Huiswerk week 3

Opgave 1.

(i) Een rij (a_n) is recursief gedefinieerd door $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ en de recursie $a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1}$. Geef een expliciete formule voor a_n aan.

(ii) Een rij (b_n) is recursief gedefinieerd door $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ en de recursie $b_{n+1} = 3b_n - 2b_{n-1}$. Geef een expliciete formule voor b_n aan.

(iii) Een rij (c_n) is recursief gedefinieerd door de recursie $c_{n+1} = c_n + 2c_{n-1}$. Er geldt $c_0 = 4$ en $c_2 = 13$. Bepaal c_5.

Opgave 2.
Een *Dyck woord* van lengte $2n$ is een keten w van de symbolen X en Y waarin X en Y telkens n keer voorkomen en waarvoor geldt dat in ieder beginstuk (van willekeurige lengte) van w minstens even veel X als Y voorkomen. Het n-de Catalan getal C_n is het aantal verschillende Dyck woorden van lengte $2n$.

(i) Laat zien dat ieder Dyck woord eenduidig te schrijven is als Xw_1Yw_2 waarbij w_1 en w_2 Dyck woorden zijn. Het is toegestaan dat w_1 of w_2 lege woorden zijn, d.w.z. woorden van lengte 0.

(ii) Leid uit deel (i) de recursie $C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \, C_{n-1-i}$ af.

(iii) Bewijs dat $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$ voor $n > 0$. (Je mag hierbij natuurlijk de expliciete formule $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ uit het college gebruiken.)

(iv) Laat zien dat de Catalan getallen aan de volgende recursie voldoen:

$$C_0 = 1, \quad C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n \text{ voor } n \geq 0.$$

Opgave 3. (Cameron: Chapter 4, opgave 12)
Zij $F(t)$ een formele machtreeks met constante term 1.

(i) Laat zien dat er een formele machtreeks $G(t)$ bestaat met $G(t) \cdot F(t) = 1$ (m.a.w. $G(t) = F(t)^{-1}$ is de multiplicatieve inverse van $F(t)$) door een recursie voor de coëfficiënten van $G(t)$ aan te geven.

(ii) Bewijs dat de coëfficiënten van $G(t)$ in $\mathbb{Z}$ liggen als dit voor de coëfficiënten van $F(t)$ geldt.

(ii) Bepaal voor $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n^2} = 1 + t + t^4 + t^9 + t^{16} + \ldots$ de coëfficiënten b_n van de multiplicatieve inverse $G(t)$ voor $n \leq 12$.

Opgave 4. (Cameron: Chapter 4, opgave 13)
Een permutatie $\pi \in Sym(n)$ heet *samenhangend* als voor geen $1 \le k < n$ de verzameling $\{1, \ldots, k\}$ door π op zich zelf afgebeeld wordt. Zij c_n het aantal samenhangende permutaties in $Sym(n)$.

(i) Laat zien dat $\sum_{k=1}^{n} c_k \, (n-k)! = n!$.

(ii) Laten $F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n! \, t^n$ en $G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n$ de voortbrengende functies van de rijen $(n!)$ en (c_n) zijn. Bewijs dat $1 - G(t) = (1 + F(t))^{-1}$.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/dw1_09/dw1.html