Huiswerk week 4

Opgave 1. (Cameron: Chapter 4, opgave 19)
De *Bernoulli getallen* b_n zijn gedefinieerd door de recursie

$$b_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k = 0 \text{ voor } n \geq 1$$

(m.a.w. $b_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k$).

(i) Zij $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n$ de exponentiële voortbrengende functie van (b_n). Laat zien dat

$$F(t) = \frac{t}{\exp(t) - 1}.$$

(Hint: Bereken $F(t) \cdot \exp(t)$.)

(ii) Bewijs dat $F(t) + \frac{1}{2}t$ een even functie is en concludeer dat $b_1 = -\frac{1}{2}$ en $b_n = 0$ voor oneven $n \geq 3$.

Opgave 2. (Cameron: Chapter 5, opgave 3)
Zij $S(n,k)$ het Stirling getal van de tweede soort met parameters n en k.

(i) Bewijs direct uit de definitie (d.w.z. zonder gebruik van directe of recursie formules voor de Stirling getallen te maken):

$$S(n,1) = 1, \quad S(n,2) = 2^{n-1} - 1, \quad S(n,n) = 1, \quad S(n,n-1) = \binom{n}{2}.$$

(ii) Vind expliciete formules voor $S(n,3)$ en voor $S(n,n-2)$.

Opgave 3.
Bewijs (bijvoorbeeld met inductie) te volgende identiteiten van de Stirling getallen van de eerste en tweede soort.

(i) $s(n,k) = \sum_{m=k}^{n} n^{m-k} s(n+1, m+1)$;

(ii) $S(n,k) = \sum_{m=k}^{n} k^{n-m} S(m-1, k-1)$.

Opgave 4. (Cameron: Chapter 5, opgave 6)
De Bernoulli getallen b_n zijn in Opgave 1 al gedefinieerd. Ze hebben de exponentiële voortbrengende functie $\frac{t}{\exp(t)-1}$. Gebruik dit en het feit dat $S(n,k)$ voor vaste k de exponentiële voortbrengende functie $\frac{(\exp(t)-1)^k}{k!}$ heeft om te bewijzen dat

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \, k! \, S(n,k)}{k+1}.$$

(Hint: Het bewijs loopt analoog met het bewijs van Stelling 5.4.2 in Cameron.)

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/dw1_09/dw1.html