Huiswerk week 5

Opgave 1.

(i) Zij $G = (V, E)$ een graaf met $|V| = n$ knopen en $|E| > \binom{n-1}{2}$ kanten.
Bewijs dat G samenhangend is.

(ii) Zij $G = (V, E)$ een graaf zo dat voor ieder paar van knopen met $\{x, y\} \notin E$ (d.w.z. die niet door een kant verbonden zijn) geldt dat de som der graden van x en y minstens $n - 1$ is.
Laat zien dat G samenhangend is.

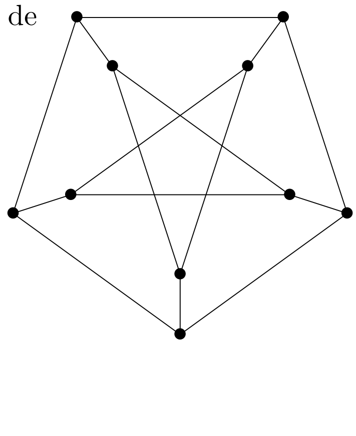
(iii) Zij $G = (V, E)$ een graaf en zij $E^c := \{\{x, y\} \mid x, y \in V, \{x, y\} \notin E\}$ de verzameling van paren van knopen die in G niet verbonden zijn. Dan heet $G^c := (V, E^c)$ de *complementaire graaf* van G.
Laat zien dat minstens een van G en G^c samenhangend is.

Opgave 2.
Een *brug* in een samenhangende graaf is een kant zo dat de graaf in twee samenhangscomponenten opsplitst als deze kant verwijderd wordt.
Het *algoritme van Fleury* construeert in een Eulersche multigraaf een Euler cykel stuksgewijs. Het algoritme werkt als volgt:

- Begin met een willekeurige knoop v_0;
- itereer de volgende stappen:
  - stel dat een beginstuk $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ van een cykel al geconstrueerd is;
  - kies een nog niet gebruikte kant e_{k+1} die v_k bevat, waarbij een brug alleen maar gekozen wordt als er geen andere mogelijkheid vanuit v_k bestaat;
  - verwijder de kant e_{k+1} uit de lijst van nog niet gebruikte kanten.

Bewijs dat het algoritme altijd een Euler cykel oplevert.

Opgave 3. (Cameron: Chapter 11, opgave 2)
In het figuur hiernaast zie je de *Petersen graaf.*



(i) Zij v een willekeurige knoop van G. Laat zien dat de graaf $G-v$ verkregen door de knoop v uit G te verwijderen (en alle kanten die v bevatten) Hamiltonsch is.

(ii) Laat zien dat G zelf niet Hamiltonsch is.

Opgave 4.
Een veelvlak laat zich als graaf interpreteren door als knopen de hoekpunten van het veelvlak te nemen en als kanten de ribben (en dus de zijvlakken de vergeten). De *Platonische lichamen* tetraëder, kubus (hexaëder), octaëder, dodecaëder, icosaëder zijn de veelvlakken die door regelmatige veelhoeken van een enkele soort begrensd zijn.

(i) Ga na dat de grafen van de Platonische lichamen regulier zijn en geef voor ieder van deze grafen het aantal knopen en kanten en de graad van iedere knoop aan.

(ii) Bedenk een manier om de grafen van de Platonische lichamen te tekenen. Dit kan op zo'n manier dat de kanten geen snijpunten behalve de knopen hebben. (Grafen die zich op deze manier laten tekenen, heten ook *planaire grafen.*)

(iii) Laat zien dat de grafen van alle Platonische lichamen Hamiltonsch zijn.

(iv) Voor welke van de Platonische lichamen is de bijhorende graaf Eulersch?

Geef voor ieder van de Platonische lichamen een gesloten wandeling van minimale lengte aan die alle kanten minstens een keer bevat (waarbij de lengte het aantal gebruikte kanten is).

Webpagina: http://www.math.ru.nl/∼souvi/dw1_09/dw1.html