Huiswerk week 7

Opgave 1. (Cameron: Chapter 15, opgave 2)

(i) Bepaal het aantal niet-equivalente grafen op 5 punten, waarbij twee grafen equivalent zijn als een permutatie van de knopen de ene gelijk aan de andere maakt.

(ii) Geef voor ieder mogelijk aantal van kanten aan hoeveel niet-equivalente grafen er met dit aantal kanten zijn.

(iii) Het is duidelijk dat voor een graaf met m kanten de complementaire graaf $10 - m$ kanten heeft. De grafen met hoogstens 4 kanten corresponderen dus met de grafen met minstens 6 kanten.

Geef de verschillende grafen met 5 kanten expliciet aan. Welke van deze grafen zijn equivalent met hun complementaire graaf, welke niet?

Opgave 2.
Bepaal voor de kubus, octaëder en dodecaëder telkens

(i) het aantal verschillende kleuringen van de zijvlakken met r kleuren;

(ii) het aantal verschillende kleuringen van de zijvlakken waarbij precies 3 kleuren worden gebruikt.

Opgave 3.
In de scheikunde spelen vaak verbindingen een rol waarbij een koolstofatoom in het middelpunt van een tetraëder zit en op de hoekpunten van de tetraëder vier radicalen geplaatst zijn.
Stel er zijn 4 mogelijke typen van radicalen (bijvoorbeeld $\mathtt{HOCH}_2$, $\mathtt{C}_2\mathtt{H}_5$, $\mathtt{Cl}$, $\mathtt{H}$)

(i) Laat zien dat er 36 verschillende typen van verbindingen zijn.

(ii) Laat zien dat er 11 verschillende typen van verbindingen zijn die precies een $\mathtt{H}$-radicaal bevatten.

(iii) Hoeveel verschillende typen van verbindingen zijn er die telkens 0, 1, 2, 3 of 4 $\mathtt{H}$-radicalen bevatten?

Opgave 4.
Zij D_n de diëdergroep met $2n$ elementen, d.w.z. de symmetriegroep van een regelmatige n-hoek (let op, bij Cameron heet deze groep D_{2n} omdat ze orde $2n$ heeft).

(i) Zij $n = p$ een oneven priemgetal. Bepaal de cykel index van D_p.

We willen zwart-witte parelketens van p parels maken. Laat zien dat het aantal verschillende parelketens met precies d zwarte parels voor $1 \leq d \leq p-1$ gelijk is aan

$$\frac{1}{2p}\left(\binom{p}{d} + p\binom{(p-1)/2}{\lfloor d/2 \rfloor}\right)$$

waarbij $\lfloor x \rfloor$ het grootste gehele getal $\leq x$ is.

(ii) Zij $n = 2m$ een even getal. Laat zien dat het aantal zwart-witte parelketens met even veel (dus m) zwarte en witte parels gelijk is aan:

$$\begin{cases} \frac{1}{2m}\left(\sum_{d|m}\varphi(d)\binom{2m/d}{m/d} + m\binom{m}{m/2} + 2m\binom{m-1}{m/2}\right) & \text{als } m \text{ even} \\ \frac{1}{2m}\left(\sum_{d|m}\varphi(d)\binom{2m/d}{m/d} + 2m\binom{m-1}{(m-1)/2}\right) & \text{als } m \text{ oneven} \end{cases}$$

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/dw1_09/dw1.html