Tentamen Discrete Wiskunde 1

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voordat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen; antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Opgave 1. (12 punten)

(i) De rij (a_n) is recursief gedefinieerd door $a_0 := 2$ en de recursie $a_{n+1} := a_n^2$ voor $n \geq 0$.

Geef een expliciete formule voor a_n aan.

(ii) De rij (b_n) is recursief gedefinieerd door $b_0 := 0$, $b_1 := 1$ en de recursie $b_{n+2} := 5b_{n+1} - 6b_n$ voor $n \geq 0$.

Geef een expliciete formule voor b_n aan.
(Hint: De nulpunten van $x^2 - 5x + 6$ zijn 2 en 3.)

Opgave 2. (10 punten)
Zij $F(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$ de voortbrengende functie van de rij (a_n). Verder zij b_n voor $n \geq 0$ gedefinieerd door

$$b_n := a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Laat zien dat de rij (b_n) de voortbrengende functie $G(t) = \dfrac{F(t)}{1-t}$ heeft.

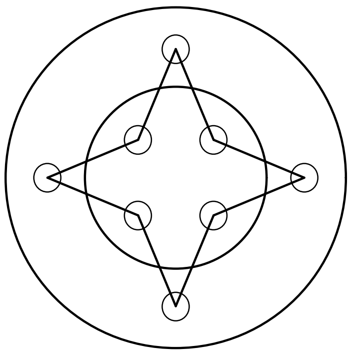
Opgave 3. (13 punten)
Een graaf $G = (V, E)$ heet *bipartiet* als $V = X \cup Y$ met $X \cap Y = \emptyset$ en $E \subseteq X \times Y$, d.w.z. iedere kant van G verbindt een punt in X met een punt in Y.

(i) Bewijs dat een willekeurige graaf G bipartiet is dan en slechts dan als alle cykels in G even lengte hebben.

(ii) Bewijs dat in een bipartiete graaf de opsplitsing van V in de delen X en Y eenduidig bepaald is dan en slechts dan als de graaf samenhangend is.

z.o.z.

Opgave 4. (15 punten)
Voor de achtste verjaardag van je neefje heb je een buitengewone taart gemaakt, die uit twee delen bestaat, een inwendige ronde marsepeintaart met een ringvormige chocoladetaart eromheen. Als versiering erop heb je een ster gemaakt en natuurlijk worden ook nog acht kaarsen zo als in het plaatje aangegeven op de taart geplaatst.
De taart staat op een tweedelige plaat waarvan je de inwendige rotonde en de buitenste ring onafhankelijk van elkaar kunt draaien. Natuurlijk mag je alleen maar zo draaien dat de ster zijn vorm behoudt, d.w.z. de kaarsen moeten weer op de aangeven plekken terecht komen.



(i) Bepaal de cykel index van de groep die door draaiing van de twee delen van de plaat op de 8 kaarsen werkt.
(Hint: De groep heeft 16 elementen.)

(ii) Stel je hebt kaarsen in r verschillende kleuren ter beschikking. Wat is het aantal verschillende kleurpatronen dat je hiermee kunt maken?

Twee kleurpatronen worden hierbij alleen maar als verschillend beschouwd als de een niet door draaiing van de delen van de plaat in de andere overgevoerd kan worden.

(iii) Wat is het aantal verschillende kleurpatronen waarbij je vier roze en vier paarse kaarsen op de taart plaatst (met dezelfde equivalentie van kleurpatronen als in deel (ii))?

Succes ermee!