Opgave 4.
Rond een cirkelvormige tafel met n stoelen worden r personen in alfabetische volgorde (met de klok mee) geplaatst, zo dat tussen twee personen minstens een stoel vrij blijft. Twee plaatsingen die alleen maar om een rotatie verschillen worden as hetzelfde beschouwd. Hoeveel verschillende plaatsingen zijn er?
Hoe verandert het antwoord, als er in plaats van r personen r identieke poppen worden geplaatst?
(Hint: Als je het *Lemma van Burnside* over het aantal banen onder de werking van een groep niet (meer) kent, zal de relatie $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ nuttig blijken.)

Oplossing: We beschrijven een plaatsing door de rij $x_1, x_2, \ldots, x_r$, waarbij x_i het aantal lege stoelen tussen persoon i en $i+1$ aangeeft (x_r dus het aantal stoelen tussen persoon r en 1). Er geldt $x_1 + x_2 + \ldots + x_r = n - r$ en volgens het Corollary van Theorem 13.1 uit het boek zijn er hiervoor $\binom{n-r-1}{r-1}$ oplossingen met $x_i \geq 1$.

Als we nu de personen door poppen vervangen, moeten we rekening houden met cyklische rotaties van de rij $x_1, x_2, \ldots, x_r$ (i.e. $x_2, x_3, \ldots, x_r, x_1$ enz.), want nu is er geen aangewezen *eerste* persoon meer.
In principe kan dit met het *Lemma van Burnside* over het aantal banen onder de werking van een groep, maar dat is hier nog niet behandeld (en misschien uit het vak Symmetrie weer iets weggezakt). We zullen echter op hetzelfde resultaat uitkomen!
Omdat plaatsingen die alleen maar om een rotatie verschillen als hetzelfde beschouwd worden, kunnen we een oplossing $x_1, x_2, \ldots, x_r$ cyklisch doorschuiven en krijgen dezelfde plaatsing voor $x_2, x_3, \ldots, x_r, x_1$ enz. We zouden dus het aantal oplossingen door r willen delen. Het probleem hierbij zijn rijen met een periode. Als een rij namelijk periode d heeft, krijgen we die niet r keer als oplossing, maar slechts d keer. Om deze fout goed te maken, moeten we dus nog iets met de periodieke oplossingen doen.
In principe willen we de oplossingen met precieze periode d met een factor $\frac{r}{d}$ tellen (om achteraf ook hiervoor door r te kunnen delen). Als een rij periode d heeft, moet $d \mid r$ en $d \mid n$ gelden en er zitten $h := \frac{r}{d}$ herhalingen van $x_1, \ldots, x_d$ in de rij $x_1, \ldots, x_r$. Dan geldt ook $h \mid r$ en $h \mid n$. Verder heeft een rij met periode d natuurlijk ook m herhalingen voor iedere deler van $h = \frac{r}{d}$.
Nu weten we dat $\sum_{m|h} \varphi(m) = h = \frac{r}{d}$. Als we dus een rij met m herhalingen met multipliciteit $\varphi(m)$ tellen en de som over alle delers van $\frac{r}{d}$ nemen, zullen we inderdaad de gewenste factor $\frac{r}{d}$ bereiken.
Omdat een rij met h herhalingen een oplossing geeft voor het probleem met $n' = \frac{n}{h}$ stoelen en $r' = \frac{r}{h}$ personen, krijgen we voor het aantal plaatsingen de formule

$$\frac{1}{r} \sum_{m|r,\ m|n} \binom{\frac{n-r}{m} - 1}{\frac{r}{m} - 1} \cdot \varphi(m).$$

De termen in deze som zijn precies de uitdrukkingen die we ook via het Lemma van Burnside hadden gekregen, er zijn namelijk $\varphi(m)$ elementen van orde m in een cyklische groep van orde r en een rij is een vast punt voor zo'n element als hij periode $\frac{r}{m}$ heeft. Het aantal rijen met periode $\frac{r}{m}$ is juist $\binom{\frac{n-r}{m}-1}{\frac{r}{m}-1}$, in het resultaat van boven hoeven we alleen maar n door $\frac{n}{m}$ en r door $\frac{r}{m}$ vervangen.