Huiswerk week 1

Opgave 1.
Het is een gebruikelijke conventie dat $\binom{n}{k} = 0$ gedefinieerd wordt, als $k < 0$ of $k > n$.
Bewijs de volgende identiteiten voor binomiaalcoëfficiënten:

(i) $\displaystyle \binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$.

(ii) $\displaystyle \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$.

(iii) $\displaystyle \sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$.

(iv) $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$.

(v) $\displaystyle \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2 = \begin{cases} 0 & \text{als } n \text{ oneven;} \\ (-1)^m \binom{2m}{m} & \text{als } n = 2m. \end{cases}$
(Hint: denk aan de formule $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.)

Opgave 2.
Zij $\mathcal{B}$ een systeem van b verzamelingen $B \subseteq \{1, \dots, n\}$. Stel dat geldt:

- iedere verzameling $B \in \mathcal{B}$ bevat precies k elementen;
- voor iedere $i \in \{1, \dots, n\}$ is i in precies r verzamelingen $B \in \mathcal{B}$ bevat.

(i) Laat zien dat $bk = nr$.

(ii) Geef voorbeelden van dit soort systemen $\mathcal{B}$ voor de parameters:

(a) $n = 6$, $k = 3$, $b = 4$, $r = 2$.
(b) $n = 6$, $k = 4$, $b = 3$, $r = 2$.
(c) $n = 6$, $k = 2$, $b = 9$, $r = 3$.
(d) $n = 12$, $k = 4$, $b = 9$, $r = 3$.
(e) $n = 12$, $k = 9$, $b = 4$, $r = 3$.

Probeer in ieder geval systemen te vinden, waarvoor $\max(|B \cap B'| \mid B \neq B')$ zo klein mogelijk is.

Opgave 3.

Bepaal het aantal monische veeltermen van graad d (d.w.z. veeltermen van de vorm $x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$) over het eindige lichaam $\mathbb{F}_p$ (het lichaam met p elementen) die in $\mathbb{F}_p$ geen nulpunten hebben.
(Hint: Een monische veelterm f met $f(i) = 0$ laat zich schrijven als $f = (x-i)g$, waarbij g weer een monische veelterm is.)

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/dw1_10/dw1.html