Huiswerk week 2

Opgave 4.
Rond een cirkelvormige tafel met n stoelen worden r personen in alfabetische volgorde (met de klok mee) geplaatst, zo dat tussen twee personen minstens een stoel vrij blijft. Twee plaatsingen die alleen maar om een rotatie verschillen worden as hetzelfde beschouwd. Hoeveel verschillende plaatsingen zijn er?
(Hint: Als je het *Lemma van Burnside* over het aantal banen onder de werking van een groep niet (meer) kent, zal de relatie $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ nuttig blijken.)

Opgave 5.
Zij S_n de groep van permutaties van $\{1, \dots, n\}$.

(i) Bepaal voor $2 \le k \le n$ het aantal verschillende k-cykels $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ in S_n.

(ii) Bewijs dat de orde van een element $\pi \in S_n$ het kleinste gemene veelvoud van de lengtes van cykels in de cykel notatie van π is.

(iii) Bij een *shuffle* van een kaartspel met 52 kaarten wordt het spel in twee stapels opgesplitst en vervolgens worden de twee helften in elkaar geshuffeld, zo dat de kaarten in de volgorde $1, 27, 2, 28, \dots, 26, 52$ komen.

Na hoeveel van deze shuffles zijn de kaarten weer in de oorspronkelijke volgorde?

(iv) De *exponent* $e := exp(G)$ van een groep G is het kleinste getal e zo dat $g^e = 1$ voor alle $g \in G$. De exponent is dus het kleinste gemene veelvoud van de ordes van elementen in G.

Bewijs dat $exp(S_n) = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{a_r}$ waarbij $p_1, \dots, p_r$ de priemgetallen $\le n$ zijn en $p_i^{a_i}$ de hoogste macht van p_i is die $\le n$ is.

Opgave 6.
Zij $S(n, k)$ het Stirling getal van de tweede soort met parameters n en k.

(i) Bewijs direct uit de definitie (d.w.z. zonder gebruik te maken van directe of recursieve formules voor de Stirling getallen):

$$S(n, 1) = 1, \quad S(n, 2) = 2^{n-1} - 1, \quad S(n, n) = 1, \quad S(n, n-1) = \binom{n}{2}.$$

(ii) Vind expliciete formules voor $S(n, 3)$ en voor $S(n, n-2)$.

Opgave 7.
Bewijs (bijvoorbeeld met inductie) te volgende identiteiten voor de Stirling getallen van de eerste en tweede soort.

(i) $s(n,k) = \sum_{m=k}^{n} n^{m-k} s(n+1, m+1)$;

(ii) $S(n,k) = \sum_{m=k}^{n} k^{n-m} S(m-1, k-1)$.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/dw1_10/dw1.html