Huiswerk week 3

Opgave 8.

(i) De rij (a_n) is recursief gedefinieerd door $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ en de recursie $a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1}$. Geef een expliciete formule voor a_n aan.

(ii) De rij (b_n) is recursief gedefinieerd door $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ en de recursie $b_{n+1} = 3b_n - 2b_{n-1}$. Geef een expliciete formule voor b_n aan.

(iii) De rij (c_n) is recursief gedefinieerd door de recursie $c_{n+1} = c_n + 2c_{n-1}$. Er geldt $c_0 = 4$ en $c_2 = 13$. Bereken c_5 rechtstreeks uit de recursie en de beginwaarden.

Geef ook een expliciete formule voor c_n aan.

Opgave 9.
De *Bernoulli getallen* b_n zijn gedefinieerd door de recursie

$$b_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k = 0 \text{ voor } n \geq 1,$$

m.a.w. $b_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k$.

(i) Zij $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$ de exponentiële voortbrengende functie van (b_n). Laat zien dat

$$F(x) = \frac{x}{\exp(x) - 1}.$$

(Hint: Bereken $F(x) \cdot \exp(x)$.)

(ii) Bewijs dat $F(x) + \frac{1}{2}x$ een even functie is en concludeer dat $b_1 = -\frac{1}{2}$ en $b_n = 0$ voor oneven $n \geq 3$.

(iii) Gebruik deel (i) en het feit dat $S(n,k)$ voor vaste k de exponentiële voortbrengende functie $\frac{1}{k!}(\exp(x) - 1)^k$ heeft om te bewijzen dat

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \, k!}{k+1} \, S(n,k).$$

Opgave 10.
Een permutatie $\pi \in S_n$ heet *samenhangend* als voor geen $1 \leq k < n$ de verzameling $\{1, \ldots, k\}$ door π op zich zelf afgebeeld wordt. Zij c_n het aantal samenhangende permutaties in S_n.

(i) Laat zien dat $\sum_{k=1}^{n} c_k \, (n-k)! = n!$.

(ii) Laten $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$ en $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ de voortbrengende functies van de rijen $(n!)$ en (c_n) zijn. Bewijs dat

$$1 - G(x) = \frac{1}{1 + F(x)}.$$

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/dw1_10/dw1.html