

Huiswerk week 5

Opgave 15.

Laten X en Y verzamelingen zijn en zij G een groep van permutaties op X en H een groep van permutaties op Y . De groep $G \times H$ werkt op de verzameling van afbeeldingen $f : X \rightarrow Y$ door $f^{(\sigma, \tau)}(x) := f(x^{\sigma^{-1}})^{\tau}$. Twee afbeeldingen in een baan onder deze werking noemen we *equivalent*.

Merk op: Het aantal banen op alle afbeeldingen is gegeven door Theorem 37.3 in van Lint/Wilson.

- (i) Laat zien dat injectieve afbeeldingen onder deze werking naar injectieve afbeeldingen gaan.
- (ii) Bepaal het aantal banen op de injectieve afbeeldingen afhankelijk van de cykel typen $1^{z_1(\sigma)} 2^{z_2(\sigma)} \dots n^{z_n(\sigma)}$ en $1^{z_1(\tau)} 2^{z_2(\tau)} \dots m^{z_m(\tau)}$ in G en H .
- (iii) De zes zijden van een dobbelsteen worden tot een ring (van lengte zes) geordend. De rotaties van de kubus (toegepast voor het vormen van de ring) en de rotaties van de ring werken op de mogelijke patronen op de ring en twee patronen in dezelfde baan onder deze werking worden als equivalent beschouwd.

Hoeveel patronen zijn er tot op equivalentie na?

Hoeveel patronen zijn er, als we naast rotaties ook spiegelingen van de ring toelaten?

Opgave 16.

Zij G_1 een permutatie groep op n punten en G_2 een permutatie groep op m punten en neem aan dat $n \geq m$

Laat zien dat het cykel index polynoom van $G_1 \times G_2$ het product van de cykel index polynomen van G_1 en G_2 is, d.w.z. bewijs dat

$$Z_{G_1 \times G_2}(X_1, \dots, X_n) = Z_{G_1}(X_1, \dots, X_n) \cdot Z_{G_2}(X_1, \dots, X_m).$$

Opgave 17.

Op hoeveel manieren kunnen 2 blauwe, 3 witte en 4 oranje ballen op twee emmers en drie dozen verdeeld worden?

Opgave 18.

De acht zijvlakken van een octaëder worden met de kleuren rood, oranje, blauw en turkoois ingekleurd. Twee kleuringen worden als equivalent beschouwd als ze door een rotatie van de octaëder en mogelijk een verwisseling van rood en oranje, een verwisseling van blauw en turkoois of beide verwisselingen in elkaar getransformeerd worden.

- (i) Bepaal het aantal kleuringen op equivalentie na.
- (ii) Bepaal het aantal kleuringen op equivalentie na waarbij even veel zijden rood en oranje zijn, en even veel zijden blauw en turkoois.

Bij deel (ii) zou de hulp van MAGMA nuttig kunnen zijn.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/dw1_10/dw1.html