Discrete Wiskunde 1 **voorjaar 2010**

Huiswerk week 6

Opgave 19.

(i) Zij $G = (V, E)$ een simpele graaf met $|V| = n$ knopen en $|E| > \binom{n-1}{2}$ kanten.

Bewijs dat G samenhangend is.

(ii) Zij $G = (V, E)$ een simpele graaf en zij

$$E^c := \{\{x, y\} \mid x, y \in V, x \neq y, \{x, y\} \notin E\}$$

de verzameling van paren van knopen die in G niet verbonden zijn. Dan heet $G^c := (V, E^c)$ de *complementaire graaf* van G.

Laat zien dat minstens een van G en G^c samenhangend is.

Opgave 20.
Een *brug* in een samenhangende graaf is een kant zo dat de graaf in twee samenhangscomponenten opsplitst als deze kant verwijderd wordt.
Het *algoritme van Fleury* construeert in een Eulerse multigraaf een Euler cykel stuksgewijs. Het algoritme werkt als volgt:

- Begin met een willekeurige knoop v_0;
- itereer de volgende stappen:
  - stel dat een beginstuk $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ van een cykel al geconstrueerd is;
  - kies een nog niet gebruikte kant e_{k+1} die v_k bevat, waarbij een brug in de deelgraaf van nog niet gebruikte kanten alleen maar gekozen mag worden als er geen andere mogelijkheid vanuit v_k meer bestaat;
  - verwijder de kant e_{k+1} uit de lijst van nog niet gebruikte kanten.

Bewijs dat het algoritme altijd een Euler cykel oplevert.

Opgave 21.
Zij $q \geq 2$ en $Q := \{0, 1, \ldots, q-1\}$. Zij $G = (V, E)$ de simpele graaf met $Q^n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in Q\}$ als knopen waarbij twee knopen $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ door een kant verbonden zijn dan en slechts dan als ze slechts in een enkele component verschillen, d.w.z. als $a_i \neq b_i$ voor precies één index i.

(i) Laat zien dat G Hamiltons is.

(ii) Geef voor de gevallen $q = 2, n = 4$ en $q = 3, n = 3$ een Hamilton cykel aan.

Opgave 22.
Een *isomorfisme* tussen twee simpele grafen G_1, G_2 met knopen $V = \{1, \ldots, n\}$ is een permutatie $\sigma \in S_n$ zo dat $\{i, j\}$ een kant van G_1 is dan en slechts dan als $\{\sigma(i), \sigma(j)\}$ een kant van G_2 is.
Een isomorfisme van een simpele graaf G met zich zelf heet een *automorfisme* van G. De automorfismen van G vormen een ondergroep $Aut(G) \leq S_n$, de *automorfismengroep* van G.

(i) Laten $T_1, T_2, \ldots, T_r$ representanten voor de isomorfieklassen van bomen met n knopen zijn. Bewijs dat

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{n!}{|Aut(T_i)|} = n^{n-2}.$$

(ii) Geef een afschatting naar beneden voor het aantal isomorfieklassen van bomen op n punten.

Bepaal de concrete waarde van je afschatting voor $n = 10$, $n = 20$, $n = 50$ en $n = 100$.

(Hint: Gebruik deel (i) en de formule van Stirling voor $n!$. De verkregen afschatting is redelijk realistisch, omdat de meeste bomen een zeer kleine automorfismengroep hebben. De daadwerkelijke aantallen zijn: $n = 10$: 106, $n = 20$: 823065, $n = 50$: $105452337029115095 34 = 1.05 \cdot 10^{19}$, $n = 100$: $6301346583474657205636072819776395270195 90 = 6.30 \cdot 10^{41}$.)

(iii) Bepaal voor $n = 5, 6$ en 7 representanten voor de isomorfieklassen van bomen met n knopen. Bepaal voor iedere representant ook zijn automorfismengroep.

Gebruik deel (i) om te laten zien dat de lijst volledig is.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/dw1_10/dw1.html