Huiswerk week 7

Opgave 23. Zij K_n de volledige graaf met n knopen en zij e een kant van K_n. Zij G de graaf verkregen uit K_n door de kant e weg te laten, d.w.z. $V(G) = \{1, \ldots, n\}$, $E(G) = E(K_n) \setminus \{e\}$.
Bewijs dat G precies $(n-2)n^{n-3}$ opspannende bomen heeft.
(Hint: Ga na wat de Prüfer codes voor opspannende bomen van K_n zijn, die de kant $\{n-1, n\}$ bevatten.)

Opgave 24.
Zij $G = (V, E)$ een samenhangende gewogen graaf.

(i) Stel dat de gewichten van de kanten van G alle verschillend zijn. Bewijs dat G in dit geval een unieke minimale opspannende boom heeft.

(ii) Zij T een minimale opspannende boom van G. Laat zien dat in het algoritme van Kruskal de kanten zo gekozen kunnen worden dat het algoritme T terug geeft (d.w.z. iedere minimale opspannende boom is een mogelijke output van het algoritme van Kruskal).

(iii) Bedenk een graaf G met de volgende eigenschappen:

  (1) G bevat een cykel met daarin kanten $e \neq e'$ met $c(e) = c(e')$. Het gewicht $c(e)$ is noch het laagste noch het hoogste gewicht in G.

  (2) G heeft een unieke opspannende boom T. Deze bevat e maar niet e'.

(Hint: Bij (i) en (ii) is het handig om de gewichten om kleine hoeveelheden ε te wijzigen en een soort continuiteitsargument toe te passen.)

Opgave 25.
Een variatie op het algoritme van Kruskal om een minimale opspannende boom in een gewogen graaf G te construëren is het *algoritme van Prim*. Dit werkt als volgt:

- Begin met een knoop x_1 en zij T_1 de boom met $V(T_1) = x_1$ en geen kanten.
- Stel dat een boom T_k al geconstrueerd is, definieer T_{k+1} dan als volgt:
  - kies een kant $e = \{x, y\} \in E(G)$ van minimaal gewicht waarvoor $x \in V(T_k)$ en $y \notin V(T_k)$
  - voeg e en zijn eindpunt y aan T_k toe, d.w.z. definieer $T_{k+1} := (V(T_k) \cup \{y\}, E(T_k) \cup \{e\})$.
- Stop het groeiproces bij T_n.

Laat zien dat het algoritme van Prim een minimale opspannende boom oplevert.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/dw1_10/dw1.html