Discrete Wiskunde 2 **voorjaar 2009**

Huiswerk week 1

Opgave 1. (Cameron: Chapter 9, opgave 3)
Zij $F_q(n)$ het totale aantal lineaire deelruimten van de n-dimensionale vectorruimte $\mathbb{F}_q^n$ over het lichaam $\mathbb{F}_q$ met q elementen.

(i) Bewijs dat $(q^k - 1)\left[{n \atop k}\right]_q = (q^n - 1)\left[{n-1 \atop k-1}\right]_q$ en concludeer dat

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + (q^n - 1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q.$$

(ii) Laat zien dat $F_q(n)$ aan de recursie

$$F_q(0) = 1, \quad F_q(1) = 2, \quad F_q(n+1) = 2F_q(n) + (q^n - 1)F_q(n-1) \text{ voor } n \geq 1$$

voldoet.

(iii) Ga na dat $F_q(n) \geq q^{\lfloor n^2/4 \rfloor}$ (waarbij $\lfloor x \rfloor$ het grootste gehele getal $\leq x$ is).

Opgave 2.
Voor de gewone binomiaalcoëfficiënten gelden de identiteiten $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ en $\binom{n+k+1}{n+1} = \binom{n+k+1}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{n}$ (vgl. Discrete Wiskunde 1, week 1, opgave 2(ii) en (iii)).
Bewijs voor de q-binomiaalcoëfficiënten de volgende analoge formules:

(i) $$\begin{bmatrix} n+m \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{i=0}^{k} q^{(m-i)(k-i)} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ k-i \end{bmatrix}_q = \sum_{i=0}^{k} q^{i(m-k+i)} \begin{bmatrix} m \\ k-i \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q.$$
(Hint: Gebruik x en y waarvoor $yx = q\,xy$.)

(ii) $$\begin{bmatrix} n+k+1 \\ n+1 \end{bmatrix}_q = \sum_{i=0}^{k} q^i \begin{bmatrix} n+i \\ n \end{bmatrix}_q.$$

Opgave 3.
De q-exponentiële functie $\exp_q(x)$ is gedefinieerd door de (formele) machtreeks

$$\exp_q(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n)_q!}.$$

(i) Bewijs dat

$$\exp_q(x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n-1)/2} \frac{(-x)^n}{(n)_q!}.$$

(ii) Stel dat voor x en y geldt dat $yx = q\,xy$. Laat zien dat

$$\exp_q(x+y) = \exp_q(x) \cdot \exp_q(y).$$

Opgave 4.
De q-afgeleide $\left(\frac{d}{dx}\right)_q$ van een functie $f(x)$ is gedefinieerd door

$$\left(\frac{d}{dx}\right)_q f(x) := \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}.$$

Laat zien dat

(i) $\left(\frac{d}{dx}\right)_q x^n = (n)_q\, x^{n-1}$;

(ii) $\left(\frac{d}{dx}\right)_q \exp_q(x) = \exp_q(x)$, waarbij $\exp_q(x)$ de q-exponentiële functie uit Opgave 3 is.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/dw2_09/dw2.html