Huiswerk week 2

Opgave 5. (Cameron: Chapter 9, opgave 6)
Zij $PG(n,q)$ de projectieve meetkunde van dimensie n over $\mathbb{F}_q$, d.w.z. de punten van $PG(n,q)$ zijn de 1-dimensionale deelruimten van ${\mathbb{F}_q}^{n+1}$ en de k-vlakken van $PG(n,q)$ zijn de $(k+1)$-dimensionale deelruimten van ${\mathbb{F}_q}^{n+1}$.
Zij V een verzameling van punten in $PG(n,q)$. Bewijs dat V een k-vlak in $PG(n,q)$ vormt dan en slechts dan als voor ieder paar van punten $P, Q \in V$ ook de (unieke) lijn door P en Q in V bevat is.

Opgave 6.
Zij $\mathcal{P}$ een verzameling van q^2+q+1 punten en zij $\mathcal{B}$ een stelsel van deelverzamelingen van $\mathcal{P}$ zo dat ieder punt van $\mathcal{P}$ in $q+1$ elementen van $\mathcal{B}$ ligt en twee elementen van $\mathcal{B}$ elkaar in precies een punt snijden.
Bewijs dat $\mathcal{P}$ een projectief vlak is met de deelverzamelingen in $\mathcal{B}$ als lijnen, d.w.z. laat zien dat iedere $L \in \mathcal{B}$ precies $q+1$ punten bevat en dat twee punten in een unieke $L \in \mathcal{B}$ liggen.

Opgave 7.
Zij $\mathcal{P}$ een projectief vlak van orde q en $\mathcal{O}$ een deelverzameling van $\mathcal{P}$ zo dat geen drie punten uit $\mathcal{O}$ op een lijn liggen. Een *tangent* aan $\mathcal{O}$ is een lijn in $\mathcal{P}$ die precies een snijpunt met $\mathcal{O}$ heeft.

(i) Laat zien dat $|\mathcal{O}| \leq q+2$ en dat voor $|\mathcal{O}| = q+2$ iedere lijn die $\mathcal{O}$ snijdt, $\mathcal{O}$ in precies twee punten snijdt.

(ii) Bewijs dat het geval $|\mathcal{O}| = q+2$ alleen maar voor even q mogelijk is.

(iii) In het geval $|\mathcal{O}| = q+1$ heet $\mathcal{O}$ een *ovaal* in $\mathcal{P}$. Laat zien dat in een ovaal iedere punt een eenduidige tangent heeft.

(iv) In het geval $|\mathcal{O}| = q+2$ heet $\mathcal{O}$ een *hyperovaal* in $\mathcal{P}$. Laat zien dat weglaten van een punt uit een hyperovaal een ovaal oplevert, d.w.z. voor $P \in \mathcal{O}$ en $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \setminus \{P\}$ is $\mathcal{O}'$ een ovaal.

Laat verder zien dat alle tangenten aan $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \setminus \{P\}$ door het punt P lopen. In het bijzonder ligt een ovaal dus in een eenduidig hyperovaal en bevat een hyperovaal $q+2$ ovalen.

(v) Bewijs dat in het Fano vlak $PG(2,2)$ het complement van een hyperovaal een lijn is. Concludeer hoeveel hyperovalen en ovalen $PG(2,2)$ bevat.

Opgave 8. (Cameron: Chapter 9, opgave 9)

(i) Bewijs dat de affiene en projectieve vlakken van orde 2 uniek zijn (tot op herbenoeming van de punten na).

(ii) Bewijs dat de affiene en projectieve vlakken van orde 3 uniek zijn.

(iii) Stel je wilt met behulp van een computer (maar zonder gebruik van de stelling van Bruck-Ryser) bewijzen dat er geen affiene en projectieve vlakken van orde 6 bestaan. Bedenk een manier om dit aan te pakken en maak een (grove) afschatting of dit in een realistische tijd uitgevoerd kan worden.

(Hint: Het is handig de q^2 elementen van een affien vlak van orde q in een $q \times q$ matrix te plaatsen. Ga na dat je dan mag aannemen dat twee van de $q + 1$ equivalentieklassen van parallelle lijnen de rijen en kolommen van deze matrix zijn.)

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/dw2_09/dw2.html