Huiswerk week 3

Opgave 9.
Bewijs dat in de projectieve meetkunde $PG(n,q)$ de stelling van Pappus geldt. De uitspraak van de stelling van Pappus luidt als volgt:
Laten L_1, L_2 twee lijnen zijn die elkaar snijden, laten a_1, b_1, c_1 drie punten op L_1 en a_2, b_2, c_2 drie punten op L_2 zijn zo dat geen van deze zes punten het snijpunt van L_1 en L_2 is. Zij c het snijpunt van de lijn door a_1 en b_2 met de lijn door a_2 en b_1, zij a het snijpunt van de lijn door b_1 en c_2 met de lijn door b_2 en c_1 en zij b het snijpunt van de lijn door c_1 en a_2 met de lijn door c_2 en a_1.
Dan liggen a, b, c op een lijn.
(Hint: Het is handig om aan te nemen dat L_1 en L_2 de lijnen met homogene coördinaten $[1,0,0]$ en $[0,1,0]$ in een projectief vlak zijn. Geef aan waarom dit mag.)

Opgave 10. (Cameron: Chapter 16, opgave 1)
Een *uitbreiding* van een $t-(v,k,\lambda)$ design $(X,\mathcal{B})$ is een $(t+1)-(v+1,k+1,\lambda)$ design $(Y,\mathcal{C})$ zo dat het afgeleide design bij weglaten van een punt $y \in Y$ isomorf met $(X,\mathcal{B})$ is.

(i) Laat zien dat een noodzakelijke voorwaarde voor het bestaan van een uitbreiding van een $t-(v,k,\lambda)$ design met $b = |\mathcal{B}|$ blokken is dat $k+1$ een deler van $b(v+1)$ is.

(ii) Bewijs dat een projectief vlak van orde $q > 1$ alleen maar een uitbreiding kan hebben als $q \in \{2,4,10\}$.

Opgave 11.
Zij $(X,\mathcal{B})$ een $t-(v,k,\lambda)$ design en zij $U \subset X$ met $u = |U| \leq t$.

(i) Laat zien dat het aantal blokken $B \in \mathcal{B}$ met $B \cap U = \emptyset$ gelijk is aan $b_u = \lambda\binom{v-u}{k}/\binom{v-t}{k-t}$.

(ii) Zij $S \subset X$ met $s = |S|$ en stel dat $s + u \leq t$. Laat zien dat het aantal blokken $B \in \mathcal{B}$ met $B \cap U = \emptyset$ en $S \subset B$ gelijk is aan $\lambda\binom{v-s-u}{k-s}/\binom{v-t}{k-t}$.

Opgave 12.
Zij A een abelse groep van orde v (die we als optelgroep schrijven, dus met 0 als neutraal element). Een deelverzameling $D \subset A$ met $|D| = k$ heet een *verschilverzameling* met parameters (v,k,λ) als de verschillen $a-b$ voor $a,b \in D$ iedere waarde van $A \setminus \{0\}$ precies λ keer aannemen. Voor $a \in A$ noteren we met $a+D$ de translatie $a+D := \{a+d \mid d \in D\}$ van D.

(i) Laat zien dat A met de blokken $\mathcal{B} := \{a+D \mid a \in A\}$ een $2-(v,k,\lambda)$ design vormt en bepaal de waarde van λ (afhankelijk van v en k).

(ii) Zij $\mathbb{F}_q$ een eindig lichaam met q elementen en neem aan dat $q \equiv 3 \bmod 4$. Laat zien dat de verzameling $D := \{x^2 \mid 0 \neq x \in \mathbb{F}_q\}$ van kwadraten in $\mathbb{F}_q$ een verschilverzameling met parameters $(q,(q-1)/2,(q-3)/4)$ vormt.
(Hint: Voor $q \equiv 3 \bmod 4$ is -1 geen kwadraat in $\mathbb{F}_q$, want de multiplicatieve groep $\mathbb{F}_q^*$ is cyclisch van orde $q-1$ en $-1 = z^{(q-1)/2}$ voor een voortbrenger z van $\mathbb{F}_q^*$. Omdat $(q-1)/2$ voor $q \equiv 3 \bmod 4$ oneven is, is -1 geen kwadraat.)

(iii) Maak 2-designs met parameters

(a) $2-(7,3,1)$,

(b) $2-(11,5,2)$,

(c) $2-(13,4,1)$,

(d) $2-(16,6,2)$

door geschikte verschilverzamelingen in $\mathbb{F}_7$, $\mathbb{F}_{11}$, $\mathbb{F}_{13}$ en $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ te vinden.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/dw2_09/dw2.html