Discrete Wiskunde 2 **voorjaar 2009**

Huiswerk week 4

Opgave 13.
Zij $(X, \mathcal{B})$ een $2-(v,k,\lambda)$ design met $b = |\mathcal{B}|$ blokken. We weten dat dan ieder punt $x \in X$ in $r = \frac{bk}{v}$ blokken ligt. Definieer een *lijn* als de doorsnede van alle blokken $B \in \mathcal{B}$ die een paar x, y van punten in X bevatten.
Bewijs de volgende beweringen:

(i) Ieder paar punten $x, y \in X$ ligt op een unieke lijn.

(ii) Als een lijn L een blok $B \in \mathcal{B}$ in twee punten snijdt, dan is $L \subset B$.

(iii) Voor een lijn L geldt dat $2 \leq |L| \leq \frac{b-\lambda}{r-\lambda}$.

Opgave 14. (Cameron: Chapter 8, opgave 13)
Zij $(X, \mathcal{B})$ een $STS(v)$ en $(Y, \mathcal{C})$ een $STS(w)$. Laat zien dat een $STS(vw)$ met punten $Z = X \times Y$ gemaakt kan worden door de volgende drie typen van blokken voor Z te definiëren:

(1) $\{(x, y_1), (x, y_2), (x, y_3)\}$ met $x \in X$ en $\{y_1, y_2, y_3\} \in \mathcal{C}$.

(2) $\{(x_1, y), (x_2, y), (x_3, y)\}$ met $y \in Y$ en $\{x_1, x_2, x_3\} \in \mathcal{B}$.

(3) $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ met $\{x_1, x_2, x_3\} \in \mathcal{B}$ en $\{y_1, y_2, y_3\} \in \mathcal{C}$.

Ga in het bijzonder na dat het goede aantal blokken gedefinieerd is en dat ieder paar punten van Z in een unieke blok ligt.

Opgave 15. (Cameron: Chapter 8, opgaven 7, 8, 9)
Een $3-(v,4,1)$ design $(X, \mathcal{B})$ heet een *Steiner quadrupel systeem* van orde v, kort $SQS(v)$.

(i) Laat zien dat een noodzakelijke voorwaarde voor het bestaan van een $SQS(v)$ is, dat $v \equiv 2$ of $4 \bmod 6$.

(ii) Bewijs dat voor een $SQS(v)$ het aantal blokken gelijk aan $v(v-1)(v-2)/24$ is.

(iii) Zij $X = \mathbb{F}_2^n$ een n-dimensionale vectorruimte over het lichaam van 2 elementen. Definieer de blokken door $\mathcal{B} := \{\{x, y, z, w\} \subset X \mid x + y + z + w = 0\}$.
Laat zien dat $(X, \mathcal{B})$ een $SQS(2^n)$ is.

(iv) Geeft de constructie uit (iii) over het lichaam $\mathbb{F}_3$ met 3 elementen een $SQS(3^n)$?

Opgave 16.
Construeer een $SQS(10)$ (d.w.z. een $3-(10,4,1)$ design) als uitbreiding van het $STS(9) = AG(2,3)$ met blokken

$$\begin{array}{ccc} \{123\} & \{456\} & \{789\} \\ \{147\} & \{258\} & \{369\} \\ \{159\} & \{267\} & \{348\} \\ \{168\} & \{249\} & \{357\} \end{array}.$$

(Hint: Voeg een punt 0 toe, dan moeten de blokken van het $SQS(10)$ die 0 bevatten na het weglaten van 0 juist de blokken van het $STS(9)$ zijn. Maar net zo moeten de blokken van het $SQS(10)$ die 1 bevatten na het weglaten van 1 de blokken van een $STS(9)$ zijn (echter niet van het oorspronkelijke). Dit geeft sterke randvoorwaarden voor de blokken in het $SQS(10)$.)

Extra Opdracht (niet verplicht)
In deze opdracht wordt een $STS(v)$ voor $v = 6m + 1$ rechtstreeks geconstrueerd. Zij $X = \mathbb{Z}_{2m} \times \mathbb{Z}_3 \cup \{\infty\}$. Elementen $(x, i) \in \mathbb{Z}_{2m} \times \mathbb{Z}_3$ worden gewoon componentsgewijs bij elkaar opgeteld. Verder hanteren we de conventie dat $(x, i) + \infty = \infty + (x, i) = \infty$. Er worden nu vier typen van *basis blokken* gedefinieerd:

(1) $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2)\}$;

(2) $\{\infty, (0, 0), (m, 1)\}$, $\{\infty, (0, 1), (m, 2)\}$, $\{\infty, (0, 2), (m, 0)\}$;

(3) $\{(0, 0), (i, 1), (-i, 1)\}$, $\{(0, 1), (i, 2), (-i, 2)\}$, $\{(0, 2), (i, 0), (-i, 0)\}$, voor $1 \leq i \leq m - 1$;

(4) $\{(m, 0), (i, 1), (1 - i, 1)\}$, $\{(m, 1), (i, 2), (1 - i, 2)\}$, $\{(m, 2), (i, 0), (1 - i, 0)\}$, voor $1 \leq i \leq m$.

Dit zijn in totaal $1 + 3 + 3(m - 1) + 3m = 6m + 1$ blokken. Van ieder basis blok maken we nu m blokken door voor $0 \leq a < m$ het element $(a, 0)$ bij ieder van de elementen van de blok op te tellen (voor de eerste type basis blokken krijgen we zo de blokken $\{(a, 0), (a, 1), (a, 2)\}$ met $0 \leq a < m$).
Laat zien dat ieder paar van punten uit X in precies een van de blokken bevat is.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/∼souvi/dw2_09/dw2.html