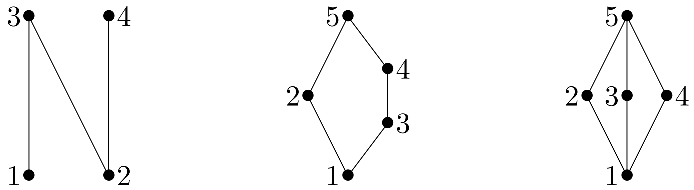
Huiswerk week 5

Opgave 17. (Cameron: Chapter 12, opgave 5)
De plaatjes hieronder geven de *Hasse diagrammen* van drie posets, namelijk de N-*poset*, de *vijfhoek* en de *drie-punten lijn* (zie Figuur 12.1 bij Cameron). De drie-punten lijn staat ook bekend als ondergroepen diagram van de viergroep van Klein. In het Hasse diagram zijn twee punten $x, y \in X$ door een lijn verbonden als $x < y$ maar niet $x < z < y$ voor een $z \in X$. Voor $x < y$ ligt y boven x.



Uit de lijnen in het Hasse diagram laten zich met behulp van de transitiviteit alle relaties tussen de elementen afleiden.

- N-poset: $1 < 3$, $2 < 3$, $2 < 4$.
- vijfhoek: $1 < 2 < 5$, $1 < 3 < 4$.
- drie-punten lijn: $1 < 2 < 5$, $1 < 3 < 5$, $1 < 4 < 5$.

(i) Bepaal alle uitbreidingen van de N-poset, de vijfhoek en de drie-punten lijn tot een totale ordening (d.w.z. tot een keten).

(ii) Bepaal de dimensies van de N-poset, de vijfhoek en de drie-punten lijn.

(iii) Laat zien dat in een willekeurige poset iedere antiketen A met $|A| > 1$ dimensie 2 heeft.

Opgave 18. (Cameron: Chapter 12, opgave 6)
De *incidentie poset* van een graaf $G = (X, E)$ heeft $X \cup E$ als elementen (d.w.z. de knopen en kanten) en de relaties $x < e$ als e een kant is die de knoop x bevat (en natuurlijk de relaties $x \leq x$ en $e \leq e$).
Laat zien dat de enige samenhangende grafen waarvoor de incidentie poset dimensie 2 heeft de paden zijn, d.w.z. bomen met alleen maar punten van graad ≤ 2.

Opgave 19.
Zij $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ een permutatie van de getallen $1, 2, \ldots, n^2 + 1$.
Toon met behulp van de stelling van Dilworth aan dat de rij (a_i) een monotone deelrij met $n + 1$ elementen heeft (d.w.z. er zijn $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n+1}$ zo dat $a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_{n+1}}$ of $a_{i_1} > a_{i_2} > \ldots > a_{i_{n+1}}$).

Opgave 20.
Zij $G = (X \cup Y, E)$ een bipartiete graaf.

(i) G heet regulier van graad d als iedere knoop dezelfde graad d heeft.

Laat zien dat iedere reguliere bipartiete graaf G een perfecte matching heeft.

(ii) G heet *semiregulier* als iedere knoop in X dezelfde graad s en iedere knoop in Y dezelfde graad t heeft.

Laat zien dat iedere semireguliere bipartiete graaf G met $|X| \le |Y|$ een perfecte matching heeft.

(iii) Zij G een reguliere bipartiete graaf van graad $n-1$ met $2n$ punten, d.w.z. $|X| = |Y| = n$.

Laat zien dat het aantal perfecte matchings in G gelijk is aan het aantal permutaties zonder vaste punten (derangements) op n punten.

Geef het aantal perfecte matchings in deze situatie voor $n = 3, 4, 5$ aan.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/dw2_09/dw2.html