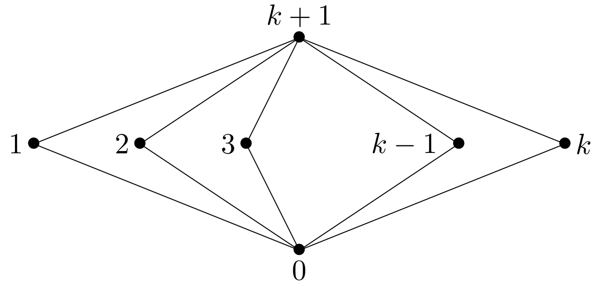
Huiswerk week 6

Opgave 21. (Cameron: Chapter 12, opgave 5)
Bepaal de Möbius functies $\mu(x, y)$ voor de volgende posets:

(i) de `N`-*poset*, de *vijfhoek* en de *drie-punten lijn* (zie Opgave 17);

(ii) een k-punten lijn: dit is de poset $X = \{0, \ldots, k+1\}$ met relaties $0 < i < k+1$ voor $i \in \{1, \ldots, k\}$ (zie het Hasse diagram hieronder);



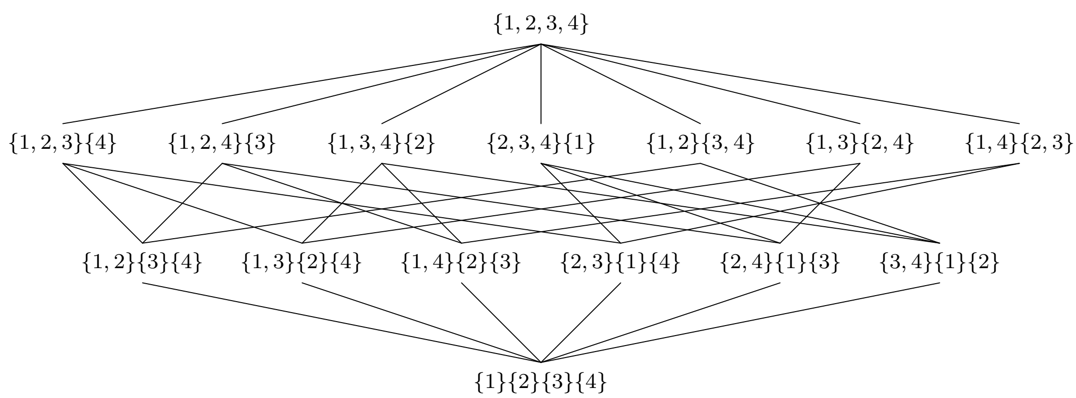
(iii) de incidentie poset van een graaf $G = (X, E)$ (zie Opgave 18).

Opgave 22. (Cameron: Chapter 12, opgave 10)
Zij $P = (X, R)$ een eindige poset. Laat zien dat voor de Möbius functie op X geldt dat

$$\mu(a, b) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i c_i(a, b)$$

waarbij $c_i(a, b)$ het aantal ketens $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i = b$ van lengte i tussen a en b is.

Opgave 23.
In deze opgave leiden we de Möbius functie voor de tralie Π_n van partities van $\{1, \ldots, n\}$ af. Hierbij geldt voor twee partities $A, B \in \Pi_n$ dat $A \leq B$ als alle blokken van A in blokken van B bevat zijn, d.w.z. A is een verfijning van B. Bijvoorbeeld ziet het Hasse diagram van Π_4 er als volgt uit:



Het minimale element 0_n van Π_n is de partitie $\{1\}\{2\}\dots\{n\}$ in n singletons, het maximale element 1_n is de partitie $\{1,2,\dots,n\}$ met een enkele blok.

(i) Bewijs dat voor posets X en Y met Möbius functies μ_X en μ_Y geldt dat de Möbius functie voor de directe product poset $X \times Y$ gegeven is door

$$\mu((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \mu_X(x_1, x_2) \cdot \mu_Y(y_1, y_2).$$

(ii) Laat zien dat voor het minimale element 0_n en het maximale element 1_n van Π_n geldt dat $\mu(0_n, 1_n) = (-1)^{n-1}(n-1)!$.
(Hint: Gebruik inductie en de stelling van Weisner: $\sum_{x, x \wedge a = 0_n} \mu(x, 1_n) = 0$ voor alle $a \in \Pi_n$ met $a < 1_n$. Kies voor a een partitie met een blok van lengte $n-1$ en een van lengte 1.)

(iii) Laat zien dat voor twee partities $A, B \in \Pi_n$ geldt dat de tralie van alle partities C met $A \leq C \leq B$ isomorf is met het directe product $\Pi_{n_1} \times \Pi_{n_2} \times \dots \times \Pi_{n_k}$ waarbij n_i het aantal blokken van A is die in de i-de blok van B liggen.

(iv) Concludeer dat voor $A, B \in \Pi_n$ met $A \leq B$ geldt dat

$$\mu(A, B) = (-1)^{|A|-|B|} \prod_{i=1}^{k} (n_i - 1)!$$

waarbij we met $|A|$ en $|B|$ het aantal blokken van A en B noteren en waarbij n_i het aantal blokken van A is die in het i-de blok van B liggen.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/dw2_09/dw2.html